



математическая физика.

7. 10. 278

7. 10. 279



mean is page 142



**ELEMENTI**

DI

# **GEOMETRIA PROIETTIVA**

DI

**LUIGI CREMONA**

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO

**AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI**

**DEL REGNO D'ITALIA**



Volume I (Testo)

contenente la materia assegnata dal Programma dell'ottobre 1871  
al 1° corso del 2° biennio.

1873

**G. B. PARAVIA E COMP.**

ROMA - TORINO - MILANO - FIRENZE.

# ELEMENTI

DI

# GEOMETRIA PROIETTIVA

DI

**LUIGI CREMONA**

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.

---

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI  
DEL REGNO D'ITALIA

---



Vol. I (con Atlante separato)  
contenente la materia assegnata dal Programma dell'ottobre 1871  
al 1° corso del 2° biennio.

---

1873

**G. B. PARAVIA E COMP.**  
ROMA - TORINO - MILANO - FIRENZE.

---

**PROPRIETÀ LETTERARIA**

---

---

**Torino, 1873. — Tip. G. B. PARAVIA e C.**

## PREFAZIONE.

---

Amplissima et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inapte sortita nomen Geometriae!

NICODERUS FRISCHLINUS in *Dialogo primo*.

Perspectivæ methodus, quæ nec inter inventas nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur...

B. PASCAL in *litt. ad Acad. Paris*. 1654.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis Cæmo, sed utilitas officiumque fuit.

OVIMUS in *Fastis*, III, 9.

Questo libro non è stato scritto per coloro che hanno l'alta missione di promuovere la scienza; eglino non ci troverebbero alcuna novità, nè di dottrine, nè di metodi. Le proposizioni sono tutte di vecchia data, tanto che per non poche bisognerebbe risalire ai geometri della più remota antichità; e ciascuno potrà rintracciarle in EUCLIDE (285 a. C.), in APOLLONIO di Perga (247 a. C.), in PAPPO d'Alessandria (4<sup>a</sup> sec. d. C.), in DESARGUES di Lione (1593-1662), in PASCAL (1623-1662), in DELAHIRE (1640-1718), in NEWTON (1642-1727), in MACLAURIN (1698-1746), in J. H. LAMBERT (1728-1777),... Le teorie ed i metodi, che di queste proposizioni fanno un insieme omogeneo ed armonico, soglion essere detti moderni, perchè creati o perfezionati da geometri più vicini a noi, come CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT....: le opere de' quali però vennero in luce dentro la prima metà del nostro secolo.

Diffondere nelle scuole italiane la cognizione di queste peregrine ed utili teorie: ecco tutto lo scopo del mio lavoro.

Ma non si creda che in Italia non siansi già fatti lodevoli sforzi per tener dietro ai progressi della scienza geometrica. G. BELLAVITIS è stato, se non erro, il primo che li additasse alla gioventù studiosa, col suo *Saggio di geometria derivata* <sup>(1)</sup>, che fu poi seguito da molti altri scritti; ed a Napoli, N. TRUDI <sup>(2)</sup> risolveva i quesiti di un celebre programma « destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica ». Nel 1854, s'era già introdotto nell'università di Pavia un corso di geometria superiore, e la cattedra ne fu poi istituita, a proposta del professore BRIOSCHI, anche presso le altre nostre maggiori università, quando l'Italia ebbe riconquistata la sua indipendenza politica <sup>(3)</sup>. Chi scrive queste pagine insegnò per sei anni la stessa scienza a Bologna, e ne applicò i metodi alla geometria descrittiva <sup>(4)</sup>; più tardi, trasferito all'Istituto tecnico superiore di Milano, e invitato dal direttore sig. BRIOSCHI a darvi un corso di statica grafica, volle far prima, a modo di necessaria preparazione, un buon numero di lezioni sulla geometria di posizione, o geometria proiettiva <sup>(5)</sup>.

<sup>(1)</sup> Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4<sup>a</sup> (1838), p. 243-288.

<sup>(2)</sup> *Produzioni relative al programma di tre quistioni geometriche, proposto dal prof. V. Flauti nell'aprile 1839* (Napoli, 1840-41).

Cito in via d'esempio BELLAVITIS e TRUDI, ma non intendo escludere che altri in Italia siasi occupato di geometria proiettiva sino da quel tempo. Anzi chieggo venia fin d'ora pei nomi che avrò dimenticato: creda il benevolo lettore che non lo faccio con intenzione; e d'altronde non mi propongo affatto di dare un sunto storico dei progressi della scienza, nemmeno limitatamente all'Italia.

<sup>(3)</sup> A Napoli salì su quella cattedra il BATTAGLINI, del quale tutti conoscono l'ingegno e l'operosità. Perchè quell'illustre e doviziosa città ha lasciato partire di là il valente professore?...

<sup>(4)</sup> Seguendo un concetto già balenato ad altri: veggasi BELLAVITIS, *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova 1851). Ad un concetto analogo è informata l'eccellente opera del prof. FIEDLER, *Die darstellende Geometrie* (Leipzig 1871), della quale si sta ora pubblicando a Firenze una traduzione italiana, per cura dei signori E. PADOVA e A. SAYNO, ad uso delle scuole politecniche.

<sup>(5)</sup> Per appunto come a Zurigo il sig. REYS faceva un corso di *Geometrie der Lage*, per preparare gli studenti di quella scuola politecnica ad udire le lezioni del prof. CULMANN, il creatore della statica grafica.

E così s'è ottenuto che ogni anno una grossa schiera di giovani fosse addestrata ai metodi moderni e ne apprendesse l'uso nelle varie parti del disegno tecnico.

Ma ciò non doveva bastare. Tanta è la semplicità di questi metodi che, mentre hanno in sè una grandissima fecondità di risultati e di applicazioni, nessuna parte delle matematiche offre maggiore agevolezza ad essere appresa, e domanda minor corredo di cognizioni preliminari. A persuadersi di ciò, basti considerare che STAUDT potè scrivere la sua *Geometrie der Lage* (1847) senza presupporre alcuna nozione di geometria elementare; che se questo libro eccellente non ebbe maggior diffusione, può darsene colpa all'assoluta mancanza di figure illustrative ed allo stile soverchiamente arido e stringato. Lo stesso pensiero mosse altri scrittori (\*), i quali, dopo avere stabilito i concetti fondamentali di spazio, superficie, linea, punto, retta e piano, misero innanzi a dirittura quelli della collineazione e della reciprocità. E forse accadrà che di qui balzi fuori in un giorno non lontano la soluzione del problema dell'insegnamento elementare della geometria: allora, ma (s'io non erro) allora soltanto, noi avremo qualcosa che meriti d'essere sostituita al metodo euclideo, l'introduzione del quale ne' nostri licei fu così vivamente e ingiustamente oppugnata (\*).

(\*) Per es. E. MÜLLER nei suoi *Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt* (Braunschweig 1869).

(\*) La smania di biasimare ogni atto del governo trasse anche persone rispettabili a stampare cose stravaganti e false intorno agli ordini scolastici dell'Inghilterra. Cotesti appassionati censori non vollero riconoscere il sommo beneficio che la riforma del 1867 ha recato, cioè quello di toglier via certi pessimi libri da molti licei del regno; non posero mente a ciò, che la libertà didattica concessa ai nostri professori e il sistema degli esami levano alla riforma ogni carattere di tirannia, e rendono assurdo il paragone colle scuole inglesi; finalmente non ci seppero mai dire qual metodo, idoneo a raggiungere i fini dell'istruzione secondaria classica, sarebbe da adottarsi in luogo dell'euclideo. — Taccio di quelle critiche che furono ispirate da basso interesse o da livori di parte: si tentò, ma invano, di gettare fango sui nomi degli uomini più insigni per meriti scientifici e per virtù pubbliche e private.

Cotesta naturale facilità delle dottrine costituenti la geometria proiettiva, facilità che le rende atte ad entrare negli elementi della scienza, venne sì bene compresa, che in ogni paese sorsero uomini autorevoli a chiedere che fossero ammesse nei quadri delle materie scolastiche. Più specialmente nella dotta ed operosa Germania si vedono ogni dì venire in luce nuovi libri, che espongono la geometria proiettiva o da sè o insieme colla geometria ordinaria, sotto forma man mano più semplice, più elementare, più accessibile agli ingegni anche mediocri: i quali libri, perchè destinati ai ginnasi ed alle scuole reali, mostrano come la *neuere Geometrie* sempre più guadagni terreno nell'istruzione secondaria. Opere siffatte, benchè con intenti meno definiti, sono state pubblicate anche in Inghilterra ed in Francia.

A cotai movimenti non poteva rimanere indifferente l'Italia e non rimase: anzi, fra noi, più prontamente che altrove, i provvedimenti governativi risposero ai voti degli uomini di scienza. Nel 1871, essendosi deliberata dal Ministero dell'agricoltura, del commercio e dell'industria una radicale riforma degli istituti tecnici, che da esso dipendono, ed un'importante sezione de' quali è volta a preparare la gioventù che più tardi entrerà nelle scuole politecniche, la geometria proiettiva è stata risolutamente innestata ne' programmi del secondo biennio; e fu anche prescritto che ai metodi di essa s'informi la geometria descrittiva. Quanto bene ridonderà alle scuole da questo provvedimento, purchè sia attuato con sincerità e con perseveranza, può immaginarselo chiunque voglia riflettere ai presenti bisogni dell'istruzione politecnica. La vigorosa e nutritiva educazione geometrica, che i giovanetti riceveranno per tal modo negli istituti tecnici, centuplicherà l'efficacia delle discipline applicative a cui dovranno attendere nelle scuole superiori, e allora il nostro ordinamento scolastico per la formazione degli

ingegneri potrà ben reggere il confronto colle migliori istituzioni straniere. E non crediamo troppo superbo il presagio che altri Stati abbiano a seguire il nostro esempio in quest'ardita innovazione.

Se non che, il nuovo programma resterebbe forse lettera morta, ove a docenti ed a scolari non si apprestasse un opportuno libro di testo. Indiscreta pretesa sarebbe stata quella di voler rimandare tutt'i professori degl'istituti tecnici, specialmente coloro cui mancò sin qui l'occasione d'erudirsi in coteste materie, alle fonti straniere: ma ove pure ciò paresse ragionevole, non sarebbesi provveduto ai discenti, i quali, privi d'un testo, si vedrebbero costretti a spendere in faticose, imperfette e spesso sterili redazioni di sunti quel tempo che assai più fruttuosamente può essere volto allo studio ed alle esercitazioni grafiche.

Fare un libro elementare, un libro che schiettamente si adatti alle scuole, è cosa difficilissima e che richiede molto e molto tempo. Per chi vive di scienza, tale impresa è piena di dubbi, di sacrifici e di amarezze: per mesi e mesi, ed anche per anni, dovrete lasciar da canto i più cari studi, chiudere negli scaffali e nascondere a voi stesso i libri più nuovi e più curiosi, mettervi a litigare coll'abbiccì della scienza; fare, disfare e rifare il vostro lavoro, tre, quattro volte, insomma sciupare il meglio delle vostre forze. Se riuscite, gloria non ne avrete: già non la speravate nemmeno, chè a siffatte fatiche altri non ci si sobbarca che per beneficio altrui. Di lucro non se ne parla; in Italia non accade sempre che un libro non pessimo trovi fortuna; sibbene, potete star certo che da qualche parte usciranno voci ad accusarvi di basso traffico.

Incredibile ma vero. Per affrontare simili casi senza perdersi la quiete dell'animo, bisognerebbe possedere un petto di bronzo: e non a tutti fu dato. Così avviene che bene spesso chi ha la coscienza di poter fare un libro utile nol fa.



Siccome però io mi son messo dentro a cotesta penosa impresa, così debbo dirne le ragioni. Quel libro che sopra ho dimostrato esser necessario perchè si possano attuare i nuovi programmi, pensai che toccasse a me di farlo; a me che di questi studi sempre feci l'occupazione mia prediletta, che sempre cercai di promuoverne la diffusione nella scuola e cogli scritti, e che vivamente desiderai la riforma che testè il governo ha provvidamente decretata.

Ecco adunque dond'è nato questo libro, ch'io dedico ai professori degli istituti tecnici, particolarmente ai giovani che hanno fede nel moto progressivo della scienza. Esso non ha punto la pretesa di passare per un lavoro originale; ad altro non aspira che ad essere considerato come un trattato elementare, scritto a bella posta per le scuole italiane e propriamente nell'intento di rispondere al nuovo programma di geometria pel primo corso del secondo biennio degli istituti tecnici. A questo terrà dietro un altro volume, che conterrà le materie assegnate al secondo corso.

Diversi nomi erano stati dati a quell'insieme di dottrine geometriche di cui qui si pongono i primi fondamenti. Non mi piacque accogliere quello di geometria superiore (*Géométrie supérieure, höhere Geometrie*), perchè in sostanza ciò che una volta potè parere elevato, ora è divenuto elementarissimo; nè quello di geometria moderna (*neuere Geometrie, modern Geometry*), che esprime del pari un concetto puramente relativo; e d'altronde la materia è in gran parte vecchia, sebbene i metodi si possano considerare come recenti. Anche il titolo di geometria di posizione (*Geometrie der Lage*) nel senso di STAUDT <sup>(1)</sup> non mi parve

(1) Equivalente a quello di *descriptive Geometry* di CAYLEY (*Sixth memoir upon quantities* nelle Transazioni filosofiche della Società reale di Londra, 1859, p. 90). *Géométrie de position* nel senso di CARNOT corrisponde ad un concetto affatto diverso da quello ch'io dovevo esprimere in testa al mio libro. Non fo menzione d'altri nomi, come *Géométrie segmentaire* e *orgon arche Geometrie*, i quali si riferiscono a nozioni troppo particolari, almeno secondo il mio modo di

meglio conveniente, per ciò che esso esclude la considerazione delle proprietà metriche delle figure. Ho invece preferito quello di geometria proiettiva <sup>(1)</sup>, col quale vocabolo si enuncia la vera natura de' metodi, che essenzialmente si fondano sulla proiezione centrale o prospettiva; tanto più che il sommo PONCELET, il quale de' metodi moderni può dirsi il principal creatore, intitolò il suo libro immortale *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).

La nomenclatura usata nel testo è la medesima che accettai da molti anni così nelle mie lezioni pubbliche, come in qualche scritto dato alle stampe. Essa non è propria esclusivamente di una sola e determinata scuola; pigliando un vocabolo da STEINER ed un altro da PONCELET o da CHASLES, cercai di preferire quelli che mi parvero meglio corrispondenti ai concetti e più facili a trasportarsi nella nostra lingua: del resto ho rigorosamente rispettato tutte quelle denominazioni che già sono entrate nell'uso generale degli scrittori <sup>(2)</sup>.

Nello svolgimento della materia non mi sono attenuto esclusivamente a questo o a quell'autore; ma da tutti ho

vedere. Al contrario la denominazione di *geometria derivata* del BELLAVITIS abbraccia un campo assai più vasto di quello che io ho preso a considerare.

<sup>(1)</sup> Cfr. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Nachrichten di Göttinga, 30 agosto 1871).

<sup>(2)</sup> Per es. seguo STEINER nell'uso delle voci *proiettivo* e *prospettivo*; prendo l'omologia da PONCELET; la punteggiata e la stella da BELLAVITIS, però quest'ultima in un significato diverso, cioè come equivalente al *Strahlenbündel*, non già al *Strahlenbüschel* dei tedeschi; preferisco il rapporto anarmonico di CHASLES al doppio-rapporto di MÖBIUS o STEINER; ecc. Adopero l'espressione *forma geometrica* per designare una serie d'elementi della stessa natura (punti, rette o piani), come l'*Elementargebilde* di STAUDT; forme geometriche fondamentali sono le *Grundgebilde* di STEINER, che si distinguono in tre specie o gradi (*Stufen*). CHASLES chiama doppi gli elementi che coincidono coi loro corrispondenti, così nell'involuzione, come nelle forme proiettive sovrapposte (*divisions homographiques sur une même droite*) in generale; invece io amo meglio seguire l'esempio di coloro che mettono qui una distinzione: e ritenuta la voce *doppi* pel primo caso, dico *uniti* nel secondo. Ho usato la denominazione di *figure correlative* nel senso di CHASLES, non già in quello di CARNOT.

tolto quanto mi parve acconcio al mio scopo, ch'era di fare un libro assolutamente elementare e tecnico, accessibile anche a coloro i quali altra conoscenza non posseggono che delle primissime cose della geometria ordinaria. Avrei potuto, imitando STAUDT, fare a dirittura astrazione da qualsiasi corredo di nozioni preparatorie; ma in tal caso il mio lavoro si sarebbe allungato di troppo, e non avrei più potuto adattarlo agli scolari degli istituti tecnici, i quali debbono aver già nel primo biennio studiato i soliti elementi di matematica. Però non tutta la geometria tradizionale è necessaria a intendere il mio libro; basteranno le poche proposizioni fondamentali sul cerchio e sui triangoli simili.

Il libro, ho detto, doveva avere un carattere tecnico, doveva cioè condurre prontamente gli scolari ad applicare le cognizioni teoriche al disegno. Perciò diedi maggior rilievo alle proprietà grafiche che non alle metriche; mi attenni ai procedimenti della *Geometrie der Lage* di STAUDT, più spesso che a quelli della *Géométrie supérieure* di CHASLES <sup>(1)</sup>; senza per altro volere del tutto escluse le relazioni metriche, il che avrebbe nociuto ad altri fini pratici dell'insegnamento <sup>(2)</sup>. Introdussi adunque l'importante nozione del rapporto anarmonico e, per mezzo di essa e delle poche proposizioni di geometria ordinaria sopra menzionate, mi fu ben facile stabilire le più utili proprietà metriche, che o appartengono alle proiettive o con esse vanno intimamente collegate.

Mi sono giovato della proiezione centrale per determinare il concetto degli elementi a distanza infinita; e, dietro l'esempio di STEINER e di STAUDT, ho posto la legge di dualità a dirittura sul cominciare del libro, come

<sup>(1)</sup> Cfr. REYS, *Geometrie der Lage* (Hannover 1866), p. xi della prefazione.

<sup>(2)</sup> Cfr. ZECH, *Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung* (Stuttgart 1857), prefazione.

un fatto logico che scaturisce immediato e spontaneo dalla possibilità di costruire lo spazio (a tre dimensioni) coll'elemento-punto o coll'elemento-piano. Gli enunciati e le dimostrazioni che si corrispondono in virtù di quella legge si trovano bene spesso collocati in doppia colonna; ma qualche volta ho tralasciato questa disposizione, per dare occasione agli scolari di esercitarsi a dedurre da un teorema il correlativo di quello. Non vi è nulla in geometria, giustamente osserva il prof. REYE nella prefazione al suo libro, che così accenda i principianti e li stimoli a fare da sè, come il principio di dualità; quindi importa sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile, e di abituarli ad usarne con sicurezza.

L'ordine delle materie da me seguito è uno de' molti possibili a escogitarsi da chi voglia esporle in un corso di lezioni; io confido però d'esser pervenuto a fare un libro che possa servire anche a chi ami tenere altro ordine dal mio. Darò qualche esempio. Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacchè l'esperienza m'ha insegnato, e altri (\*) lo aveva già osservato, che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e aiutano lo svolgimento di quella imaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere, perchè ei possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello. Ma il maestro potrebbe credere opportuno di attenersi strettamente, almeno sul principio, alla geometria piana; e in tal caso egli potrà senza danno saltar oltre parecchi numeri (†) del libro ed esporli più tardi. —

(\*) BELLAVITIS, *Saggio di Geometria derivata*, p. 247. — CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, etc. (Bruxelles 1839), p. 191.

(†) N° 19, 20, 28, 29, 31, 32, 41, 42,...

Io definisco le coniche come proiezioni del cerchio, e dopo aver dimostrato per questa curva due teoremi fondamentali (<sup>1</sup>), li trasporto alle coniche e quindi svolgo per esse tutta la teoria de' poligoni inscritti e circoscritti e quella de' poli e delle polari, senza più curarmi del caso speciale del cerchio. Ma si potrebbe invece da quelle due proposizioni fondamentali dedurre i teoremi di PASCAL, di BRIANCHON e di DESARGUES pel cerchio, non che la teoria dei poli; e poscia, mediante la proiezione od omologia, applicare tutto ciò alle coniche.

Ma su questo punto è inutile spendere altre parole. Ciascun docente, tosto che abbia fatta propria la materia, vedrà da sè come gli convenga distribuirla; ed anzi avverrà che d'anno in anno vada rimutando il modo di coordinazione, secondo i risultati della propria esperienza.

Non tutti i numeri del mio libro sono ugualmente importanti o necessari in un corso di lezioni. Il maestro sagace s'accorrerà facilmente che poche sono le proposizioni fondamentali, le sole il cui enunciato debba essere ritenuto a memoria; tutto il resto consta di corollari, casi particolari ed esercizi. Fra questi v'ha dunque una grande libertà di scelta; alcuni potranno essere trattati nella scuola, altri nei compiti domestici; bisognerà, e questo è ciò che sommanente importa, che ogni giorno gli scolari facciano deduzioni e soluzioni da sè; non si costringano alla sola parte passiva dello ascoltare e ripetere le cose dette dal maestro, ma si facciano concorrere attivamente allo svolgimento di cose nuove; in questo modo e non altrimenti si riuscirà ad accendere in essi l'amore allo studio ed a renderli padroni dei fecondissimi metodi della geometria proiettiva. Si badi infine che ai ragionamenti teorici per la dimostrazione dei teoremi e la deduzione dei corollari vada sempre compagna l'esecuzione grafica del risolvere i

(<sup>1</sup>) N° 108, 110.

problemi; potendosi qui ripetere ciò che MONGE raccomandava per la geometria descrittiva (<sup>1</sup>).

I trattati magistrali di PONCELET, di STEINER, di CHASLES e di STAUDT (<sup>2</sup>) sono quelli ai quali maggiormente debbo professarmi debitore, sia perchè in essi fanno i loro primi studi tutti coloro che si danno alla geometria, sia perchè da essi ho preso, oltre alla sostanza de' metodi, le dimostrazioni di molti teoremi e le soluzioni de' problemi. Ma insieme con quelli ebbi a consultare anche le opere di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di DELAHIRE, di NEWTON, di MACLAURIN, di LAMBERT, di CARNOT, di BRIANCHON, di MÖBIUS, di BELLAVITIS, ... e le più recenti di ZECH, di GASKIN, di WITZSCHEL, di TOWNSEND, di REYE, di POUDRA, di FIEDLER,...

Per non accrescermi le difficoltà già abbastanza gravi dell'impresa a cui ho posto mano, mi sono astenuto dallo impormi l'obbligo di continue citazioni dalle quali apparissero o tutte le fonti cui attinsi, o tutti i primi e veri autori delle singole proposizioni o teorie. Mi si perdoni adunque, se talvolta la fonte citata non è la primitiva (<sup>3</sup>) o se tal'altra la citazione manca affatto. Le mie citazioni sono scarse; e per mezzo di esse ho avuto precipuamente

(<sup>1</sup>) .... Il est nécessaire, pour le cours de géométrie descriptive, que la pratique et l'exécution soient jointes à l'audition des méthodes. Ainsi, les élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques.... (*Programme de la géométrie descriptive*).

(<sup>2</sup>) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822). — STEINER, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, etc.* (Berlin 1832). — CHASLES, *Traité de géométrie supérieure* (Paris 1852); *Traité des sections coniques* (Paris 1865). — STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847). Tralascio di menzionare altri scritti di questi grandi maestri, così come le opere del celebre PLÜCKER e di altri geometri (SEYDEWITZ, GÖPEL, WEISSENBORN, JUKOWIERS, HESSE, PAULUS, SCHRÖTER, GEISER,...), perchè non ebbi a servirmene nella composizione di questo libro.

(<sup>3</sup>) Per gli autori ricordati cito quasi sempre i trattati estesi e generalmente conosciuti, sebbene le loro scoperte siano state la prima volta annunziate altrove. Per es. i lavori di CHASLES sulla teoria delle coniche sono in gran parte anteriori al 1830; quelli di STAUDT cominciarono nel 1831; ecc.

la mira di far conoscere ai giovani i nomi de' grandi geometri e i titoli delle loro opere, divenute classiche. Il collegare agli enunciati di certi teoremi capitali i nomi illustri di EUCLIDE, di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di PASCAL, di NEWTON, di CARNOT, ... non sarà senza profitto per aiutare la mente a ritenere le cose e per eccitare quella curiosità scientifica che è sprone ad allargare la propria cultura (\*).

Le citazioni da me fatte hanno anche un altro intento, cioè di acquietare le paure di coloro ai quali il solo nome di geometria proiettiva mette i brividi addosso, come se si trattasse di novità escogitate da cervelli balzani. A costoro vorrei far toccare con mano che sono cose in gran parte venerande per antichità, tutte maturate nelle menti dei più insigni pensatori e ridotte ormai a quella forma di estrema semplicità che GERGONNE considerava come segno di perfezione per una teoria scientifica (\*). Nella mia dimostrazione procederò secondo l'ordine delle materie tenute nel libro.

Il concetto degli elementi a distanza infinita è dovuto al celebre DESARGUES, il quale, or fanno più di due secoli, considerava esplicitamente le rette parallele come concorrenti in un punto a distanza infinita (\*), ed i piani paralleli come passanti per una stessa retta all'infinito (\*). Lo stesso concetto fu rimesso in piena luce e divulgato da PONCELET,

(\*) Ho citato molte volte gli *Elementi di Matematica* del BALZER, non già come fonte originale, ma per invogliare i giovani allo studio di quell'eccellente trattato, che sarebbe per essi la miglior guida attraverso i quattro anni dell'Istituto tecnico.

(\*) ... On ne peut se flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant dans la rue (Vedi in CHASLES, *Aperçu historique*, p. 115).

(\*) *Oeuvres de DESARGUES réunies et analysées par M. POUDRA* (Paris 1864), t. I: *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (1639), p. 104-5 e 205.

(\*) *L. c.*, p. 105-6.

che pervenne alla conclusione (come conseguenza de' postulati della geometria euclidea) i punti dello spazio situati a distanza infinita doversi considerare come tutti giacenti in uno stesso piano <sup>(1)</sup>.

DESARGUES <sup>(2)</sup> e NEWTON <sup>(3)</sup> riguardarono gli assintoti dell'iperbole come tangenti, i cui punti di contatto sono a distanza infinita.

L'omologia delle figure piane, eccettuato il nome che le fu dato da PONCELET, si trova in parecchi trattati anteriori di prospettiva, per es. in LAMBERT <sup>(4)</sup>, anzi può ben dirsi in DESARGUES <sup>(5)</sup>, che enunciò e dimostrò il teorema sui triangoli e sui quadrilateri prospettivi od omologici. Del resto il teorema sui triangoli (N° 13) coincide sostanzialmente con un celebre porisma di EUCLIDE (N° 88), riferito da PAPPO <sup>(6)</sup>. L'omologia delle figure a tre dimensioni fu studiata per la prima volta da PONCELET <sup>(7)</sup>.

La legge di dualità, come principio assoluto, fu enunciata da GERGONNE <sup>(8)</sup>; e come conseguenza della teoria delle polari reciproche (principio di reciprocità polare) fu dovuta a PONCELET <sup>(9)</sup>.

Le forme geometriche (punteggiate e fasci), dai vocaboli in fuori, si trovano già in DESARGUES, e ne' geometri posteriori; nel modo più esplicito sono state definite da STEINER <sup>(10)</sup>.

CARNOT <sup>(11)</sup> considerò il quadrilatero completo, STEI-

<sup>(1)</sup> *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822), N° 96 e 580.

<sup>(2)</sup> *L. c.*, p. 210.

<sup>(3)</sup> *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1686), lib. I, prop. 27, scol.

<sup>(4)</sup> *Freie Perspective*, 2<sup>a</sup> ed. (Zürich 1774).

<sup>(5)</sup> *L. c.*, p. 413 e 416.

<sup>(6)</sup> CHASLES, *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, etc.* (Paris 1860), p. 102.

<sup>(7)</sup> *L. c.*, p. 369 e seg.

<sup>(8)</sup> *Ann. les de Mathématiques*, t. 16 (Montpellier 1826), p. 209.

<sup>(9)</sup> *Annales de Mathématiques*, t. 8 (Montpellier 1818), p. 201.

<sup>(10)</sup> *Systematische Entwicklung*, p. XIII-XVI.

<sup>(11)</sup> *De la corrélation des figures de géométrie* (Paris 1801), p. 122.



NER (\*) ne estese il concetto a tutti i poligoni ed alle figure nello spazio.

La divisione armonica era nota ai geometri della più remota antichità; e se ne trovano le proprietà fondamentali per es. in APOLLONIO (\*). DELAHIRE (\*) diede la costruzione del quarto elemento di un gruppo armonico mediante la proprietà del quadrilatero, vale a dire, coll'uso della sola riga.

STEINER insegnò sino dal 1832 le costruzioni delle forme projective (\*).

A MÖBIUS (\*) è dovuta la teoria completa dei rapporti anarmonici; ma già EUCLIDE, PAPPO (\*), DESARGUES (\*), BRIANCHON (\*) avevano dimostrata la proposizione fondamentale del N° 53, b).

Della teoria dell'involuzione è autore DESARGUES (\*), sebbene anche qui non pochi casi particolari fossero già noti ai geometri greci (\*).

La generazione delle coniche per mezzo di due forme projective è stata esposta da STEINER e da CHASLES, quarant'anni fa; ed è costituita da due teoremi fondamentali (N° 113, 114) dai quali scaturisce tutta quanta la dottrina di quelle importantissime curve. La medesima generazione comprende la descrizione organica di NEWTON (\*\*) e diversi teoremi di MACLAURIN.

PASCAL a sedici anni (1640) trovò il famoso teorema dell'esagrammo mistico (\*\*), e BRIANCHON dedusse da esso

(\*) L. c., p. 72 e 235.

(\*) *Conicorum* lib. I, 34, 36, 37, 38.

(\*) *Sectiones conicae* (Parisiis 1685), I, 20.

(\*) L. c., p. 91.

(\*) *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827), cap. 5.

(\*) *Collectiones Mathematicae*, VII, 129.

(\*) L. c., p. 425.

(\*) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris 1817), p. 7.

(\*) L. c., p. 119, 147, 171, 176.

(\*) PAPPO, *Collectiones Mathematicae*, VII, 37-56, 127, 128, 130-133.

(\*) L. c., lib. I, lemma 21.

(\*) *Lettera di LEIBNITZ à M. Périer nelle Opere di B. PASCAL* (ed. BOSSUT), t. 5, p. 459.

nel 1806, mediante la teoria dei poli, la proposizione correlativa sull'esagono circoscritto (N° 117).

Le proprietà del quadrilatero formato da quattro tangenti e del quadrangolo dei punti di contatto si leggono nell'appendice latina (*De linearum geometricarum proprietatibus tractatus*) all'edizione inglese (Londini 1748) dell'algebra postuma di MACLAURIN; il quale ne aveva dedotto la costruzione di una conica per punti o per tangenti, in parecchi dei casi in cui siano dati cinque elementi (punti o tangenti). Tutti i casi possibili furono poi risolti da BRIANCHON (*l. c.*)

L'idea di considerare due serie proiettive di punti in una stessa conica è esplicitamente dichiarata nel *Saggio* di BELLAVITIS (p. 270, nota).

A CARNOT (\*) è dovuto un celebre teorema (N° 246) sui segmenti che una conica determina sui lati di un triangolo. Anche di questo teorema certi casi particolari erano già conosciuti molto tempo innanzi (\*).

Eleganti costruzioni per le quali la sola riga basta a risolvere alcuni problemi di 1° e 2° grado, presupposto però che siano dati certi elementi, s'incontrano nella *Freie Perspective* di LAMBERT; ma la possibilità di risolvere tutti i problemi di 2° grado colla riga e con un cerchio fisso venne messa in piena luce da PONCELET; e poi comprovata coll'esecuzione di fatto da STEINER in un aureo suo libretto (N° 184).

Con diverse denominazioni la teoria dei poli e delle polari era già contenuta nelle opere citate di DESARQUES (\*) e di DELAHIRE (\*). In seguito, la perfezionarono MONGE (\*), BRIANCHON (\*) e PONCELET, il quale ultimo ne trasse fuori

(\*) *Géométrie de position* (Paris 1803), N° 379.

(\*) APOLLONIO, *Conicorum* lib. III, 16-23. — DESARQUES, *l. c.*, p. 202. — DELAHIRE, *l. c.*, V, 10, 12. — NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini 1706), p. 4.

(\*) *l. c.*, p. 184, 186, 190 e seg.

(\*) *l. c.*, I, 21-28; II, 23-30.

(\*) *Géométrie descriptive* (Paris 1795), N° 40.

(\*) *Journal de l'École polytechnique*, cahier 13 (Paris 1806).

la teoria delle figure polari reciproche, che in sostanza è la legge di dualità, da lui chiamata principio di reciprocità polare.

Finalmente le più insigni proprietà dei diametri coniugati furono esposte da APOLLONIO nei libri 2° e 7° del suo trattato delle coniche.

Del resto, chi vorrà procacciarsi più estesa e precisa conoscenza dei progressi della geometria dalle prime origini sino al 1830 (il che basta per le materie contenute in questo libro), non ha che a leggere il classico *Aperçu historique* del sig. CHASLES.

A questo volume va unito un atlante di 44 tavole, contenenti 212 figure, i cui numeri però vanno solamente da 1 a 199. Spero che le figure, per numero e qualità, saranno bastevoli a rendere il libro intelligibile anche pei più inesperti principianti. Le figure furono per la maggior parte disegnate dal sig. ingegnere CARLO SAVIOTTI, assistente alla mia scuola nel R. Istituto tecnico superiore; le rimanenti dal sig. GUIDO PERELLI, studente licenziato dall' Istituto tecnico di Milano. All'uno e all'altro io rendo qui pubblica testimonianza di gratitudine. E ringrazio anche la casa editrice, che usò ogni diligenza affinchè la stampa riuscisse nitida e corretta.

Milano, 5 novembre 1872.

L' AUTORE.

# PROGRAMMA DI GEOMETRIA

per l'anno 3° degli Istituti tecnici.

---

Proiezione centrale: N° 1-20.

Forme geometriche fondamentali: 21-26.

Proprietà armonica del quadrilatero e costruzioni che ne conseguono: 38-52.

Proiettività delle rette punteggiate e dei fasci di rette: 33-37, 60-65, 73-83.

Costruzione di una forma proiettiva ad una data: 66-72.

Rapporti anarmonici: 53-59.

Fasci proiettivi nel circolo; tangenti punteggiate proiettive: 107-112.

Teoremi sui poligoni inscritti o circoscritti (teoremi di PASCAL, di BRIANCHON) e loro conseguenze: 117, 127, 129, 131-133, 135, 137, 139, 141.

Serie proiettive di punti in una circonferenza o in una conica: 157, 160.

Costruzione degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte: 162.

Metodo di falsa posizione per la risoluzione grafica dei problemi di 2° grado; applicazioni: 166, 168, 169, 172-175, 181-185.

Involuzione di punti in linea retta: 92-106, 163, 164.

Involuzione di punti in una circonferenza o in una conica: 159, 161, 165.

Poli e polari; costruzioni che ne dipendono: 186-195, 204, 205, 219, 220, 222-224.

Inscrizione di poligoni, i cui lati debbano passare per punti dati: 172-175, 185.

Teorema sul quadrilatero segnato da una trasversale: 101-103.

Figure polari reciproche: 230-235.

Legge di dualità: 27-32, 234, 235.

Le coniche, proiezioni centrali del cerchio: 18,  $f$ ).

Le coniche generate mediante due forme proiettive: 113-115.

## xx

Proprietà delle coniche; teoremi di PASCAL, di BRIANCHON, di DESARGUES e loro conseguenze: [117-119](#), [127](#), [129](#), [131-133](#), [135](#), [137](#), [139](#), [141-143](#), [145-147](#), [149](#), [152](#), [153](#), [155](#), [156](#).

Costruzione di una conica soggetta a cinque condizioni (punti o tangenti): [116](#), [124-126](#), [128](#), [130](#), [134](#), [136](#), [138](#), [140-141](#), [144](#), [148](#), [150](#), [170](#), [171](#).

Classificazione delle curve di 2° grado: [18](#), *g*).

Centro, diametri coniugati ed assi: [206-218](#), [225-229](#), [244](#), [245](#).

Proprietà speciali dell'ellisse, dell'iperbole, della parabola: [120-123](#), [151](#), [154](#), [167](#), [208](#), [211](#), [239-245](#), [250](#).

Costruzioni grafiche: [18](#), [50](#), [53 f](#)), [55 d](#)), [66-72](#), [102](#), [116](#), [124-126](#), [144](#), [148](#), [150](#), [162](#), [166](#), [169-175](#), [177-185](#), [191](#), [193](#), [199-201](#), [213](#), [222](#), [227](#), [229](#), [239-244](#), [246 e](#)), [247-249](#), [251-261](#), [267](#), [271](#).

Esercizi: [29](#), [31](#), [84-91](#), [104](#), [105](#), [118](#), [119](#), [124](#), [142](#), [146](#), [147](#), [149](#), [152](#), [153](#), [155](#), [156](#), [165](#), [167](#), [168](#), [176-185](#), [194](#), [196-203](#), [221-223](#), [227-229](#), [236-271](#).

**NB.** Il 2° volume di quest'operetta conterrà le proprietà focali delle coniche, la teoria dei coni e delle figure sferiche, ed i principii di geometria analitica, secondo il programma del 4° anno.

---

# ELEMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA .

## § 1. Definizioni.

1. Dirò figura un complesso qualsivoglia di punti, di rette e di piani; le quali rette e i quali piani si concepiscano estesi all'infinito, senza alcun riguardo alle porzioni finite di spazio da essi circoscritte. Per esempio, col nome di triangolo s'intenderà il sistema di tre punti e delle tre rette che li congiungono a due a due; col nome di tetraedro il sistema di quattro piani e de' quattro punti in cui si segano a tre a tre, ecc.

Per uniformità di notazione, designerò costantemente i punti con lettere italiche majuscole  $A, B, C, \dots$ , le rette colle minuscole  $a, b, c, \dots$ , i piani con lettere greche  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Oltre a ciò, con  $AB$  si rappresenterà la retta determinata dai due punti  $A, B$ ; con  $A\alpha$  il piano che passa pel punto  $A$  e per la retta  $\alpha$ ; con  $\alpha\alpha$  il punto comune alla retta  $\alpha$  ed al piano  $\alpha$ ; con  $\alpha\beta$  la retta determinata dai piani  $\alpha, \beta$ ; con  $ABC$  il piano dei tre punti  $A, B, C$ ; con  $\alpha\beta\gamma$  il punto comune ai tre piani  $\alpha, \beta, \gamma$ ; con  $\alpha.BC$  il punto comune al piano  $\alpha$  ed alla retta  $BC$ ; con  $A.\beta\gamma$  il piano passante pel punto  $A$  e per la retta  $\beta\gamma$ ; con  $\alpha.Bc$  la retta comune al piano  $\alpha$  ed al piano  $Bc$ ; con  $A.Bc$  la retta che congiunge il punto  $A$  col punto  $Bc$ , ecc. Scrivendo  $\alpha.BC \equiv A'$  si vorrà significare che il punto comune al piano  $\alpha$  ed alla retta  $BC$  è  $A'$ ; la scrittura  $u \equiv ABC \dots$  indicherà che la retta  $u$  contiene i punti  $A, B, C \dots$ , ecc.

2. Proiettare da un punto fisso  $O$  (centro di proiezione) una figura  $[ABCD \dots, abcd \dots]$  composta di punti e di rette significa costruire le rette o raggi proiettanti  $OA, OB, OC, OD, \dots$  e i piani (piani proiettanti)  $Oa, Ob, Oc \dots$ . Si ottiene così una nuova figura composta di rette e di piani passanti pel centro  $O$ .

3. Segare con un piano fisso  $\sigma$  (piano trasversale) una figura  $[\alpha\beta\gamma\delta \dots, abcd \dots]$  composta di piani e di rette significa

abbracciano insieme colla denominazione di forme geometriche fondamentali di 1<sup>a</sup> specie.

La quarta e la quinta figura, cioè il piano punteggiato o rigato e la stella, che si deducono parimente l'una dall'altra con una delle operazioni (N<sup>o</sup> 2, 3) e che oltre a ciò hanno la proprietà di contenere entro di sè infinite forme fondamentali di 1<sup>a</sup> specie, diconsi forme geometriche fondamentali di 2<sup>a</sup> specie.

Lo spazio, che comprende in sè infinite forme di 2<sup>a</sup> specie, vien considerato come forma fondamentale di 3<sup>a</sup> specie.

Le forme geometriche fondamentali sono adunque sei: tre di 1<sup>a</sup>, due di 2<sup>a</sup> ed una di 3<sup>a</sup> specie.

## § 6. Principio di dualità.

27. La geometria, in generale, studia la generazione e le proprietà delle figure contenute: 1<sup>o</sup> nello spazio a tre dimensioni; 2<sup>o</sup> in un piano; 3<sup>o</sup> in una stella. In tutti e tre questi casi ciascuna figura contenuta non è altro che un complesso d'elementi, o, ciò che torna lo stesso, il complesso delle posizioni assunto da un elemento mobile o variabile. L'elemento mobile, generatore delle figure, può essere nel 1<sup>o</sup> caso il punto o il piano, nel 2<sup>o</sup> il punto o la retta, nel 3<sup>o</sup> il piano o la retta. Perciò vi sono sempre due maniere correlative o reciproche di generare figure e svolgerne le proprietà: e in ciò consiste la dualità geometrica, che è la coesistenza delle figure (e quindi delle loro proprietà) a due a due: due figure coesistenti (correlative o reciproche) avendo la stessa genesi e non differendo tra loro se non per la natura dell'elemento generatore.

Nella geometria dello spazio a tre dimensioni sono forme correlative la punteggiata e il fascio di piani; il piano punteggiato e la stella, concepita come formata da piani; il piano rigato e la stella concepita come formata da raggi. Il fascio di raggi è una forma correlativa a sè medesima.

Nella geometria del piano sono forme correlative la punteggiata e il fascio di raggi.

Nella geometria della stella sono forme correlative il fascio di piani e il fascio di raggi.

La geometria del piano e la geometria della stella, considerate nello spazio a tre dimensioni, sono esse stesse correlative fra loro.

28. Ecco alcuni esempi di proposizioni correlative nella geometria dello spazio. Due proposizioni correlative si ricavano l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi punto e piano.

a) Due punti  $A, B$  determinano una retta (la retta  $AB$  che passa pei punti dati), la quale contiene infiniti altri punti.

b) Una retta  $a$  ed un punto  $B$  non situato in essa determinano un piano: il piano  $aB$  che congiunge la retta col punto.

c) Tre punti  $A, B, C$ , non situati in una medesima retta, determinano un piano: il piano  $ABC$ , che passa pei tre punti.

d) Due rette che hanno un punto comune giacciono in uno stesso piano.

e) Dati quattro punti  $A, B, C, D$ , se le rette  $AB, CD$  si segano, i quattro punti sono in uno stesso piano, epperò si segano anche le rette  $BC$  e  $AD$ , ed anche  $CA$  e  $BD$ .

f) Se quante rette si vogliono a due a due si segano, e non passano tutte per un medesimo punto, giacciono tutte in un medesimo piano (rette di un piano rigato) <sup>(1)</sup>.

g) Il problema seguente: « In un piano  $\alpha$ , per un punto  $A$  dato in esso, condurre una retta che seghi una retta data  $r$  » (che non giaccia in  $\alpha$ , nè passi per  $A$ ), ammette due soluzioni correlative:

Si congiunga il punto  $A$  col punto  $r\alpha$ .

h) PROBLEMA. — Per un punto dato  $A$  condurre una retta che seghi due rette date  $b, c$  (le quali non giacciono

Due piani  $\alpha, \beta$  determinano una retta (la retta  $\alpha\beta$ , secondo la quale i piani dati si segano), per la quale passano infiniti altri piani.

Una retta  $a$  ed un piano  $\beta$  non passante per essa determinano un punto: il punto  $a\beta$  nel quale la retta incontra il piano.

Tre piani  $\alpha, \beta, \gamma$ , non passanti per una medesima retta, determinano un punto: il punto  $\alpha\beta\gamma$ , nel quale i tre piani si segano.

Due rette poste in uno stesso piano hanno un punto comune.

Dati quattro piani  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , se le rette  $\alpha\beta, \gamma\delta$  si segano, i quattro piani concorrono in un medesimo punto; epperò si segano anche le rette  $\beta\gamma$  e  $\alpha\delta$ , ed anche  $\gamma\alpha$  e  $\beta\delta$ .

Se quante rette si vogliono a due a due si segano, e non giacciono tutte in un medesimo piano, passano tutte per uno stesso punto (rette di una stella) <sup>(2)</sup>.

Si costruisca l'intersezione del piano  $\alpha$  col piano  $rA$ .

PROBLEMA. — In un dato piano  $\alpha$  condurre una retta che seghi due rette date  $b, c$  (le quali non abbiano

<sup>(1)</sup> Vedi la nota al N° 19.

<sup>(2)</sup> Siano infatti le rette  $a, b, c, \dots$ ; siccome  $ab, ac, bc$  son tre piani distinti, così nel punto ad essi comune concorrono le rette  $a, b, c, \dots$ .



in uno stesso piano, nè alcuna di esse passi per  $A$ ).

**SOLUZIONE.** — Si costruisca l'intersezione dei piani  $Ab$ ,  $Ac$ .

un punto comune, nè alcuna di esse giaccia ivi  $\alpha$ ).

**SOLUZIONE.** — Si congiunga il punto  $\alpha b$  col punto  $\alpha c$ .

**29.** Nella geometria a tre dimensioni, la figura correlativa di un triangolo (sistema di tre punti) è un triedro (sistema di tre piani): al piano, ai vertici, ai lati del triangolo sono rispettivamente correlativi il vertice, le facce, gli spigoli del triedro. Laonde il teorema correlativo a quello del N° 13 sarà il seguente:

Se due triedri  $\alpha'\beta'\gamma'$ ,  $\alpha''\beta''\gamma''$  hanno la proprietà che gli spigoli  $\beta'\gamma'$  e  $\beta'\gamma''$ ,  $\gamma'\alpha'$  e  $\gamma'\alpha''$ ,  $\alpha'\beta'$  ed  $\alpha''\beta''$  giacciono in tre piani  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  passanti per una stessa retta, le rette  $\alpha'\alpha''$ ,  $\beta'\beta''$ ,  $\gamma'\gamma''$  sono situate in uno stesso piano.

La dimostrazione è la stessa del teorema al N° 13, scambiati fra loro gli elementi punto e piano. Per es. se i due triedri hanno vertici differenti  $S'$ ,  $S''$ , i punti in cui si segano le coppie di spigoli sono i vertici di un triangolo, i cui lati sono le rette  $\alpha'\alpha''$ ,  $\beta'\beta''$ ,  $\gamma'\gamma''$ ; queste sono adunque in un piano (il piano del triangolo).

Così pure, nel caso che i due triedri abbiano lo stesso vertice  $S$ , la dimostrazione sarà correlativa a quella del caso analogo de' due triangoli  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$  (situati in uno stesso piano) nel N° 13. Il teorema può anche stabilirsi proiettando da un punto  $S$  la figura che esprime il teorema del N° 12, b).

Il giovane studioso può proporsi per esercizio la dimostrazione del teorema correlativo a quello del N° 12, cioè:

Se due triedri  $\alpha'\beta'\gamma'$ ,  $\alpha''\beta''\gamma''$  sono tali che le rette  $\alpha'\alpha''$ ,  $\beta'\beta''$ ,  $\gamma'\gamma''$  giacciono in un piano, le coppie di lati  $\beta'\gamma'$  e  $\beta'\gamma''$ ,  $\gamma'\alpha'$  e  $\gamma'\alpha''$ ,  $\alpha'\beta'$  e  $\alpha''\beta''$  determinano tre piani passanti per una medesima retta.

**30.** Nella geometria piana due figure o due proposizioni correlative si deducono l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi punto e retta. Ecco qualche esempio (1):

a) Due punti  $A$ ,  $B$  determinano una retta: la retta  $AB$ .

b) Quattro punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (figura 11<sup>a</sup>), tre qualunque de' quali non siano in linea retta, costituiscono una figura che si denomina quadrangolo completo. Diconsi vertici del quadrangolo completo i quattro punti suddetti; lati del me-

Due rette  $a$ ,  $b$  determinano un punto: il punto  $ab$ .

Quattro rette  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (fig. 12<sup>a</sup>) tre qualsivogliano delle quali non concorrano in un punto, costituiscono una figura che si denomina quadrilatero completo. Diconsi lati del quadrilatero completo le quattro rette; vertici del medesimo i sei

(1) Dove, ben inteso, i punti e le rette giacciono in un solo e medesimo piano.

desimo le sei rette che li uniscono a due a due. Due lati che non passino per uno stesso vertice diconsi opposti; vi sono dunque tre coppie di lati opposti, cioè  $BC$  e  $AD$ ,  $CA$  e  $BD$ ,  $AB$  e  $CD$ . I punti  $E$ ,  $F$ ,  $G$  dove concorrono i lati opposti diconsi punti diagonali; e il triangolo  $EFG$  dicesi triangolo diagonale del quadrangolo completo.

Nel quadrangolo completo sono contenuti tre quadrangoli o quadrilateri semplici  $ACBD$ ,  $ABCD$ ,  $ABDC$  (fig. 13<sup>a</sup>).

c) In generale:

Poligono ( $n$ -gono) completo è il sistema di  $n$  punti o vertici considerati insieme con tutte le  $\frac{n(n-1)}{2}$  rette o lati che li uniscono a due a due.

d) Il teorema del N° 12 e quello del N° 13, ne' quali i due triangoli  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  siano supposti situati in un medesimo piano, sono correlativi fra loro.

e) Se due quadrangoli completi  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  hanno la proprietà che i lati  $AB$  ed  $A'B'$ ,  $BC$  o  $B'C'$ ,  $CA$  e  $C'A'$ ,  $AD$  e  $A'D'$ ,  $BD$  e  $B'D'$  si seghino in cinque punti di una retta  $s$ , anche i due lati rimanenti  $CD$  e  $C'D'$  si segheranno in un punto della medesima retta  $s$  (fig. 15<sup>a</sup>).

Infatti, in virtù dell'ipotesi (N° 13), i triangoli  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sono prospettivi, epperò le rette  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concorrono in uno stesso punto  $S$ . Medesimamente sono prospettivi i triangoli  $ADD$ ,  $A'B'D'$ , dunque anche  $DD'$  passa pel punto  $S$  comune alle  $AA'$ ,  $BB'$ . Da ciò segue che sono pure prospettivi i triangoli  $BCD$ ,  $B'C'D'$ ; dunque  $CD$  e  $C'D'$  si segano in un

punti ne' quali esse si segano a due a due. Due vertici diconsi opposti se non sono situati in uno stesso lato. Vi sono dunque tre coppie di vertici opposti, cioè  $bc$  e  $ad$ ,  $ca$  e  $bd$ ,  $ab$  e  $cd$ . Le rette  $e$ ,  $f$ ,  $g$  che uniscono i vertici opposti diconsi rette diagonali; ed il triangolo  $efg$  dicesi triangolo diagonale del quadrilatero completo.

Nel quadrilatero completo sono contenuti tre quadrilateri o quadrangoli semplici  $acbd$ ,  $abcd$ ,  $abdc$  (fig. 14<sup>a</sup>).

Multilatero ( $n$ -latero) completo è il sistema di  $n$  rette o lati considerati insieme con tutti gli  $\frac{n(n-1)}{2}$  punti o vertici ne' quali esse s'intersecano a due a due.

Se due quadrilateri completi  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$  hanno la proprietà che le coppie di vertici  $ab$  ed  $a'b'$ ,  $bc$  e  $b'c'$ ,  $ca$  e  $c'a'$ ,  $ad$  e  $a'd'$ ,  $bd$  e  $b'd'$  si trovino su cinque rette concorrenti in un punto  $S$ , anche i due vertici rimanenti  $cd$  e  $c'd'$  saranno allineati con  $S$  (fig. 16<sup>a</sup>).

Infatti, per l'ipotesi (N° 12) i triangoli  $abc$ ,  $a'b'c'$  sono prospettivi; dunque i punti  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  sono in una stessa retta  $s$ . Analogamente sono prospettivi i triangoli  $abd$ ,  $a'b'd'$ , epperò anche il punto  $dd'$  è nella retta  $s$  che passa pei punti  $aa'$ ,  $bb'$ . Da ciò segue che sono pure prospettivi i triangoli  $bed$ ,  $b'e'd'$ ; dunque  $ed$  e  $e'd'$  sono in linea retta col punto  $S$  che è determi-

punto della retta  $s$  determinata dal punto comune a  $BC$  e  $B'C'$  e dal punto comune a  $BD$  e  $B'D'$ ; c. d. d. (1).

dato dalla retta  $(bc)(b'c')$  e dalla retta  $(bd)(b'd')$ , c. d. d.

**31.** Nella geometria dello spazio, ad un poligono (piano) completo di  $n$  vertici è correlativo un angolo poliedro completo di  $n$  facce, cioè la figura costituita da  $n$  piani (facce) concorrenti in uno stesso punto (vertice dell'angolo poliedro) e considerati insieme colle  $\frac{n(n-1)}{2}$  rette (spigoli), secondo le quali essi si segano a due a due. E ad un multilatero (piano) completo di  $n$  lati è correlativo un angolo multispigolo completo, di  $n$  spigoli, cioè la figura costituita da  $n$  rette (spigoli) uscenti da uno stesso punto (vertice dell'angolo multispigolo) e considerate insieme cogli  $\frac{n(n-1)}{2}$  piani (facce) ch'esse, prese a due a due, determinano.

Per es., ai due teoremi che precedono (N° 30, e), e che nella geometria piana sono correlativi fra loro, nella geometria a tre dimensioni saranno rispettivamente correlativi i seguenti:

Se due angoli tetraedri completi (dello stesso vertice o no)  $\alpha\beta\gamma\delta$ ,  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$  hanno la proprietà che cinque coppie di spigoli corrispondenti giacciono in cinque piani passanti per una retta  $s$ , anche la sesta coppia di spigoli giacerà in un piano passante per la medesima retta.

Se due angoli quadrispighi completi (dello stesso vertice o no)  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$  hanno la proprietà che cinque coppie di facce corrispondenti si seghino secondo cinque rette contenute in un piano  $\sigma$ , anche la retta comune alla sesta coppia di facce giacerà nel medesimo piano  $\sigma$ .

Lasciamo al giovane studioso di trovare per esercizio le dimostrazioni di questi teoremi, le quali del resto differiscono da quelle dei teoremi e) soltanto per lo scambio degli elementi punto e piano; e come i teoremi e) sono una conseguenza di quelli esposti ai N° 12 e 13, così i teoremi presenti si fondano su quelli del N° 29.

Se i due angoli tetraedri hanno uno stesso vertice  $O$ , il teorema a sinistra si può anche stabilirlo col proiettare da  $O$  (N° 2) la figura che esprime il teorema e) a destra. E nella stessa ipotesi e collo stesso processo si ricava il teorema attuale a destra dal teorema e) a sinistra.

**32.** Nella geometria della stella due proposizioni o due figure correlative si ricavano l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi piano e retta. Siccome la geometria della stella è correlativa a quella del piano, rispetto allo

(1) Questi due teoremi sono dati qui come esempi per la geometria piana; ma le dimostrazioni valgono, senz'alcuna mutazione, anche nel caso che i due quadrangoli o quadrilateri giacciono in piani differenti.

spazio a tre dimensioni, così l'una geometria si ricava dall'altra collo scambio degli elementi punto e piano. La geometria della stella si può anche ricavare da quella del piano mediante proiezione da un centro (N° 2).

Dalla geometria della stella si ricava la geometria delle figure sferiche, tagliando la stella con una sfera passante pel centro della stella medesima.

## § 7. Forme proiettive.

**33.** Mediante proiezione da un centro si deduce da una punteggiata un fascio di raggi, da un fascio di raggi un fascio di piani, da un piano (punteggiato o rigato) una stella. Viceversa, mediante sezione con un piano trasversale si ritorna dal fascio di raggi alla punteggiata, dal fascio di piani al fascio di raggi, dalla stella al piano. Perciò le due operazioni — proiettare da un centro, segare con un piano trasversale — si possono riguardare come complementari; sicchè diremo che, se una forma è dedotta da un'altra mediante una di quelle operazioni, viceversa si potrà coll'operazione complementare ricavare la seconda forma dalla prima.

Suppongasi ora che da una data forma  $f_1$  si deduca mediante un'operazione (proiezione o sezione) una forma  $f_2$ ; che da  $f_2$  mediante un'altra operazione si cavi  $f_3$ ; che con una terza operazione da  $f_3$  si cavi  $f_4$ ; o così di seguito, finchè eseguite  $n-1$  operazioni, si giunga ad una forma  $f_n$ . Viceversa, noi potremo retrocedere da  $f_n$  ad  $f_1$  mediante un'altra serie di  $n-1$  operazioni: le quali siano ordinatamente complementari dell'ultima, della penultima, della terza'ultima, ... fra le operazioni che hanno servito per passare da  $f_1$  ad  $f_n$ . La serie delle operazioni che conducono da  $f_1$  ad  $f_n$ , e la serie di quelle che riconducono da  $f_n$  ad  $f_1$  si possono denominare complementari; così che le operazioni dell'una serie sono ordinatamente complementari di quelle dell'altra, prese in ordine retrogrado.

In ciò che precede, le forme geometriche sono concepite nello spazio a tre dimensioni (N° 25). Se ci limitassimo alla geometria piana, le operazioni complementari sarebbero il proiettare da un centro e il segare con una rotta trasversale. Invece nella geometria della stella, sono operazioni complementari il segare con un piano o il proiettare da un asse.

**34.** Due forme fondamentali della stessa specie diconsi proiettive, se l'una può dedursi dall'altra mediante un numero finito

qualunque di proiezioni e di sezioni ( $N^{\circ} 2, 3, \dots 7$ ). Per esempio, se si ha una punteggiata  $u_1$ , e si proietta da un centro  $O$ , ne nascerà un fascio di raggi; questo si proietta da un altro centro  $O'$ , sicchè ne risulti un fascio di piani, avente l'asse  $OO'$ ; questo fascio si seghi con una retta  $u_2$ ; la punteggiata  $u_2$  si proietta da un asse e il fascio di piani che ne risulta si seghi con un piano trasversale, donde si caverà un fascio di raggi, ecc. Or bene: due qualunque delle forme geometriche di 1<sup>a</sup> specie così ottenute sono, per definizione, proiettive.

Quando si dice che una forma  $A.B.C.D \dots$  è proiettiva ad un'altra forma  $A'.B'.C'.D' \dots$ , s'intende che, mediante una medesima serie di operazioni (proiezioni e sezioni)  $A'$  nasce da  $A$ ,  $B'$  da  $B$ ,  $C'$  da  $C$ , ecc.

Gli elementi  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ , ... diconsi corrispondenti.

**35.** Di qui si ricava subito che due forme proiettive ad una terza sono proiettive fra loro. Infatti: eseguendo prima le operazioni che servono per passare dalla 1<sup>a</sup> alla 3<sup>a</sup> forma, e poi quelle colle quali si passa dalla 3<sup>a</sup> alla 2<sup>a</sup>, si sarà effettuato il passaggio dalla 1<sup>a</sup> alla 2<sup>a</sup> forma.

**36.** Diconsi prospettive

due punteggiate (fig. 17<sup>a</sup>) se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi (cfr. N<sup>o</sup> 9);

due fasci di raggi (fig. 18<sup>a</sup>) se proiettano una medesima punteggiata da due centri diversi, ovvero se sono sezioni di uno stesso fascio di piani (1);

due fasci di piani se proiettano uno stesso fascio di raggi da due centri diversi;

(1) Se si proietta una punteggiata  $u \equiv ABC \dots$  da due centri diversi  $O, O'$  non situati in uno stesso piano colla punteggiata, si ottengono due fasci (prospettivi) di raggi, che sono inoltre sezioni fatte coi piani trasversali  $Ou, O'u$  in uno stesso fascio di piani, avente per asse la retta  $OO'$  e composto de' piani  $OO'A, OO'B, OO'C, \dots$ . Questo è il caso generale di due fasci prospettivi di raggi: essi non hanno lo stesso centro, nè giacciono in uno stesso piano; e ad un tempo proiettano una stessa punteggiata e sono sezioni di un medesimo fascio di piani. Vi sono poi due casi particolari: 1<sup>o</sup> se si proietta la punteggiata  $u$  da due centri  $O, O'$  posti in un piano con  $u$ ; allora i due fasci di raggi giacciono in uno stesso piano, epperò non sono più sezioni di un fascio di piani; 2<sup>o</sup> se un fascio di piani vien segnato da due piani trasversali passanti per uno stesso punto  $O$  dell'asse, si ottengono due fasci di raggi che hanno lo stesso centro  $O$ , epperò non proiettano più una medesima punteggiata.

una punteggiata ed un fascio di raggi, ovvero un fascio di raggi e un fascio di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

due piani se sono sezioni di una medesima stella;

due stelle se proiettano uno stesso piano da due centri diversi;

un piano ed una stella se il piano è una sezione della stella.

Dalla definizione del N° 34 segue immediatamente che due forme prospettive sono anche proiettive. Ma viceversa due forme proiettive non sono generalmente collocate in posizione prospettiva.

**37.** Due forme geometriche di 1<sup>a</sup> specie, composte ciascuna di tre elementi, sono sempre proiettive. Per dimostrare quest'asserzione, osservo anzitutto che basta considerare il caso di due punteggiate  $ABC$ ,  $A'B'C'$ ; giacchè, se alcuna delle forme proposte fosse un fascio, si potrebbe ad essa sostituire una sezione della medesima, fatta con una trasversale.

Se le due rette  $ABC$ ,  $A'B'C'$  non sono in uno stesso piano, conducansi le rette  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , e quindi si seghino le tre congiungenti con una trasversale  $s$  (<sup>1</sup>). Allora le due forme date non saranno altro che due sezioni del fascio di piani  $sAA'$ ,  $sBB'$ ,  $sCC'$ .

Se le due rette  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sono in uno stesso piano (fig. 19<sup>a</sup>), prendansi nella retta  $AA'$  due punti  $S$ ,  $S'$ , e siano:  $B''$  l'intersezione di  $SB$  con  $S'B'$ ;  $C''$  l'intersezione di  $SC$  con  $S'C'$ ;  $A''$  l'intersezione di  $SS'$  con  $B''C''$ . Allora sarà  $A''B''C''$  una proiezione tanto di  $ABC$ , quanto di  $A'B'C'$ , rispettivamente vedute dai centri  $S$ ,  $S'$ .

Nel caso poi che i punti  $A$ ,  $A'$  coincidano (fig. 20<sup>a</sup>), le due forme date sono a dirittura prospettive; il centro di proiezione è il punto comune alle  $BB'$ ,  $CC'$ .

Finalmente, se le due terne de' punti  $ABC$ ,  $A'B'C'$  (fig. 21<sup>a</sup>) fossero in una medesima retta, basterebbe proiettare una di esse  $A'B'C'$  sopra un'altra retta in  $A_1B_1C_1$ , e si ricadrebbe in uno de' casi già considerati.

Per esempio, se si volesse proiettare  $ABC$  in  $BAC$  (fig. 22<sup>a</sup>), basterebbe prendere ad arbitrio due punti  $L$ ,  $N$  allineati con  $C$ ; sia  $K$  il punto di concorso delle  $AL$ ,  $BN$ ; ed  $M$  quello ove si

(<sup>1</sup>) A quest'uopo, basta condurre da un punto arbitrario di  $AA'$  una retta che incontri  $BB'$  e  $CC'$ : vedi il problema  $h$ ) al N° 28.

segano le  $BL$ ,  $AN$ ; allora sarà  $LNC$  una proiezione di  $ABC$  dal centro  $K$ , e poi  $BAC$  una proiezione di  $LNC$  dal centro  $M$ .

Se si volesse proiettare  $ABC$  in  $BCA$ , si potrebbe proiettare dapprima  $ABC$  in  $BAC$ , poi  $BAC$  in  $BCA$ .

## § 8. Forme armoniche.

**38. TEOREMA (1).** — Se in una retta  $s$  sono dati tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e se si costruisce un quadrangolo completo ( $KLMN$ ), in modo che due lati opposti ( $KL$ ,  $MN$ ) concorrano in  $A$ , altri due lati opposti ( $KN$ ,  $ML$ ) concorrano in  $B$ , e il quinto lato ( $LN$ ) passi per  $C$ , il sesto lato ( $KM$ ) segnerà la retta data in un punto  $D$ , che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo (fig. 22<sup>a</sup>).

**Dim.** — Infatti, se si costruisce un secondo quadrangolo completo  $K'L'M'N'$ , il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni; siccome allora i due quadrangoli hanno cinque paia di lati corrispondenti che concorrono sulla retta data, così anche il sesto paio concorrerà sulla retta medesima (N° 30,  $e$ , a sinistra).

Donde segue che, se si tiene fisso il primo quadrangolo, e si varia il secondo in tutt'i modi possibili, il punto  $D$  rimane fisso, c. d. d.

I quattro punti  $ABCD$  diconsi armonici, ovvero si dice che la forma geometrica costituita dai quattro punti suddetti è armonica.

Vale a dire, quattro punti  $ABCD$  di una retta, considerati nell'ordine col quale sono enun-

Se tre rette date (in un piano)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  concorrono in un punto  $S$  e se si costruisce un quadrilatero completo ( $klmn$ ), in modo che due vertici opposti ( $kl$ ,  $mn$ ) cadano in  $a$ , altri due vertici opposti ( $kn$ ,  $ml$ ) cadano in  $b$ , e il quinto vertice ( $ln$ ) si trovi in  $c$ , il sesto vertice ( $km$ ) cadrà in una retta  $d$  passante pel punto dato, la quale è determinata, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrilatero (fig. 23<sup>a</sup>).

Infatti, se si costruisce un secondo quadrilatero completo  $k'l'm'n'$ , il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni, siccome allora i due quadrilateri hanno cinque paia di vertici corrispondenti allineate col punto dato, così anche il sesto paio sarà in linea retta col punto medesimo (N° 30,  $e$ , a destra).

Donde segue che, se si tiene fisso il primo quadrilatero, e si varia il secondo in tutt'i modi possibili, la retta  $d$  rimane fissa, c. d. d.

Le quattro rette (o i quattro raggi)  $abcd$  diconsi armoniche; ovvero si dice che la forma geometrica costituita da coteste quattro rette è armonica.

Vale a dire, quattro raggi  $abcd$  di un fascio, considerati nell'ordine col quale sono enun-

(1) STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847), N° 93.

ciati, denominansi armonici, se è possibile di costruire un quadrangolo completo i cui lati passino, due opposti per  $A$ , altri due opposti per  $B$ , il quinto per  $C$ , il sesto per  $D$ . Dal teorema che precede risulta che, se un tale quadrangolo esiste, cioè se la forma  $ABCD$  è armonica, si possono costruire infiniti altri quadrangoli sotto le medesime condizioni. Risulta inoltre che, dati tre punti  $ABC$  in linea retta (e dato l'ordine nel quale debbono essere considerati), il quarto punto  $D$  che con quelli costituisce una forma armonica è determinato ed unico, e si ottiene costruendo uno di quei quadrangoli (N° 50).

ciati, denominansi armonici, se è possibile di costruire un quadrilatero completo i cui vertici cadano, due opposti in  $a$ , altri due opposti in  $b$ , il quinto in  $c$ , il sesto in  $d$ . Dal teorema che precede risulta che, se un tale quadrilatero esiste, cioè se la forma  $abcd$  è armonica, si possono costruire infiniti altri quadrilateri sotto le medesime condizioni. Risulta inoltre che, dati tre raggi  $abc$  di un fascio (e dato l'ordine nel quale debbono essere considerati), il quarto raggio  $d$  che con quelli costituisce una forma armonica è determinato ed unico, e si ottiene costruendo uno di quei quadrilateri (N° 50).

**39.** Se i punti armonici  $ABCD$  si proiettano da un punto  $S$  sopra un'altra retta, le proiezioni  $A'B'C'D'$  saranno ancora quattro punti armonici (fig. 24<sup>a</sup>). Infatti, si imaginino due piani condotti rispettivamente per le due rette  $AB, A'B'$ , e nel primo piano si supponga costruito un quadrangolo completo, del quale due lati opposti concorrano in  $A$ , altri due opposti in  $B$ , e il quinto lato passi per  $C$ ; il sesto lato passerà allora per  $D$  (N° 38), perchè la forma  $ABCD$  è supposta esser armonica. Proiettando ora da  $S$  questo quadrangolo sul secondo piano, si ottiene un nuovo quadrangolo, del quale due lati opposti si segano in  $A'$ , altri due opposti in  $B'$ , mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per  $C', D'$ ; dunque  $A'B'C'D'$  è una forma armonica.

**40.** La considerazione della figura 23<sup>a</sup> mostra che i raggi armonici  $abcd$  sono segati da qualunque trasversale, per esempio da  $m$ , in quattro punti  $ABCD$ , che sono armonici. Infatti, abbiamo ivi un quadrangolo  $PQRS$ , del quale due lati opposti ( $a, n$ ) si segano in  $A$ , altri due lati opposti ( $b, l$ ) in  $B$ , mentre il quinto ( $c$ ) ed il sesto lato ( $d$ ) passano rispettivamente per  $C, D$ .

Viceversa, suppongasì data la forma armonica  $ABCD$  (fig. 23<sup>a</sup>), ed assumasi ad arbitrio il centro di proiezione  $S$ . Dico che i quattro raggi proiettanti  $S (A, B, C, D)$  sono armonici. Infatti, tirisi



a volontà una retta per  $A$ , che seghi  $SB$  in  $P$ ,  $SC$  in  $Q$ ; e quindi la  $BQ$  che seghi  $AS$  in  $R$ . Considerando il quadrangolo  $PQRS$ , del quale due lati opposti concorrono in  $A$ , altri due pure opposti in  $B$ , mentre il quinto lato  $SQ$  passa per  $C$ , concludiamo (N° 38 a sinistra) che, essendosi supposta armonica la forma  $ABCD$ , il sesto lato dee passare per  $D$ . Ma allora noi abbiamo un quadrilatero completo  $klmn$ , che ha due vertici opposti  $A, R$  in  $SA$ , altri due vertici opposti  $B, P$  in  $SB$ , il quinto vertice  $Q$  in  $SC$  ed il sesto vertice  $D$  in  $SD$ ; dunque (N° 38 a destra) le quattro rette che da  $S$  proiettano  $ABCD$  sono armoniche. Laonde:

Quattro raggi armonici sono segati da una trasversale arbitraria in quattro punti armonici, e viceversa i raggi che proiettano quattro punti armonici da un centro arbitrario sono armonici.

**41.** Il teorema del N° 38 a destra è correlativo (nella geometria piana) di quello che gli sta contro a sinistra, nel quale si suppongano tutt'i quadrangoli situati in uno stesso piano. Però il teorema del N° 38 a sinistra vale colla medesima dimostrazione anche se i quadrangoli sono costruiti in piani diversi.

Considerando adunque quest'ultimo teorema come una proposizione di geometria dello spazio a tre dimensioni, il teorema correlativo sarà il seguente:

Se tre piani dati  $\alpha, \beta, \gamma$  passano per una stessa retta  $s$ , e se si costruisce un angolo tetraedro  $\kappa\lambda\mu\nu$  completo, del quale due spigoli  $\kappa\lambda, \mu\nu$  opposti siano nel piano  $\alpha$ , altri due spigoli opposti  $\kappa\nu, \lambda\mu$  siano nel piano  $\beta$ , e lo spigolo  $\lambda\nu$  cada in  $\gamma$ , il sesto spigolo  $\kappa\mu$  si troverà sempre in un piano determinato  $\delta$ , che non muta comunque si disponga degli elementi arbitrari dell'angolo tetraedro.

Infatti, se (collo stesso vertice o con altro vertice) si costruisce un altro angolo tetraedro completo, che soddisfaccia alle prescritte condizioni, i due angoli tetraedri avranno cinque coppie di spigoli corrispondenti situate in piani che passano per una medesima retta  $s$ , epperò (N° 31 a sinistra) anche la sesta coppia giacerà in un piano contenente la retta  $s$ .

Diciamo armonici i quattro piani  $\alpha\beta\gamma\delta$ , ossia armonica la forma da essi costituita.

**42.** Segando l'angolo tetraedro  $\kappa\lambda\mu\nu$  con un piano arbitrario, non passante pel vertice, si ottiene un quadrilatero completo; e lo

stesso piano trasversale interseca i piani  $\alpha\beta\gamma\delta$  secondo quattro raggi  $abcd$  di un fascio, de' quali i primi due contengono due coppie di vertici opposti del quadrilatero, mentre gli altri due passano rispettivamente per gli altri due vertici. Dunque (N° 38 a destra) quattro piani armonici  $\alpha\beta\gamma\delta$  sono segati da un piano trasversale secondo quattro rette armoniche.

Così pure, se i quattro piani armonici  $\alpha\beta\gamma\delta$  sono incontrati da una retta trasversale in quattro punti  $ABCD$ , la forma  $ABCD$  è armonica. Infatti, si conduca per la retta trasversale un piano, che segli i piani  $\alpha\beta\gamma\delta$  secondo le rette  $abcd$ ; queste rette sono armoniche, come s'è ora dimostrato. Ma  $ABCD$  è una sezione del fascio  $abcd$ ; dunque (N° 40)  $ABCD$  sono quattro punti armonici.

**43.** Dunque, se colla denominazione di forma armonica indichiamo indifferentemente il gruppo di quattro punti o raggi o piani armonici, avremo il teorema:

Qualunque proiezione o sezione di una forma armonica è una forma armonica. Ossia:

Ogni forma proiettiva ad una forma armonica è pur essa una forma armonica.

a) Viceversa, due forme armoniche sono sempre proiettive. Per dimostrare questa proprietà, basta considerare il caso di due gruppi di quattro punti, giacchè se una delle due forme fosse un fascio, segandolo con una trasversale, si otterrebbero quattro punti armonici. Supposto adunque che  $ABCD, A'B'C'D'$  sian due forme armoniche, si progetti  $ABC$  in  $A'B'C'$  nel modo che è spiegato al N° 37; le stesse operazioni (proiezioni e sezioni) che servono a dedurre  $A'B'C'$  da  $ABC$  condurranno da  $D$  ad un punto  $D_1$ ; donde segue che la forma  $A'B'C'D_1$  sarà armonica, come lo è  $ABCD$ . Ma anche  $A'B'C'D'$  sono, per ipotesi, quattro punti armonici; dunque  $D_1$  coincide con  $D'$ , giacchè i tre punti  $A'B'C'$  individuano il quarto punto che con essi dee costituire la forma armonica (N° 38 a sinistra); il che è quanto volevasi provare.

b) Aggiungiamo una conseguenza delle poste definizioni (N° 41 e 42):

La forma correlativa ad una forma armonica è pur essa armonica.

**44.** Se  $a, b, c, d$  (fig. 24<sup>a</sup>) sono raggi di un fascio, si dice che  $a, b$  sono separati mediante  $c, d$ , quando un raggio che ruoti

descrivendo il fascio non può passare da  $a$  a  $b$  senza passare per uno (uno solo) degli altri due raggi  $c, d$ . La medesima definizione valga per quattro piani di un fascio, e per quattro punti  $A, B, C, D$  d'una punteggiata (fig. 24<sup>a</sup>); purchè si ammetta che in una retta (fig. 25<sup>a</sup>) si possa passare da un punto  $A$  ad un punto  $B$  in due modi, cioè o descrivendo il segmento finito  $AB$ , o descrivendo il segmento infinito che comincia in  $A$ , passa pel punto all'infinito e termina in  $B$ .

Premessa questa definizione, enunciamo la seguente proprietà che è evidente: Quattro elementi di una forma di 1<sup>a</sup> specie (cioè quattro punti di una retta o quattro raggi di un fascio, ecc.) si possono sempre e in un sol modo distinguere in due coppie per modo che l'una sia separata mediante l'altra. Per es. nella figura 24<sup>a</sup>, le due coppie che si separano scambievolmente sono  $AB, CD$ . E se  $A'B'C'D'$  è una forma proiettiva ad  $ABCD$ , saranno del pari  $A'B'$  separati mediante  $C'D'$ , giacchè le operazioni e le sezioni non alterano la posizione relativa degli elementi.

45. Siano ora  $ABCD$  quattro punti armonici (fig. 22<sup>a</sup>); cioè quattro punti ottenuti colla costruzione del N° 38 a sinistra, sicchè si possa costruire (in infinite maniere diverse) un quadrangolo completo, del quale  $A$  e  $B$  siano due punti diagonali (N° 30,  $b$ , a sinistra), mentre per  $C$  e  $D$  passino due lati opposti. Basta enunciare questa costruzione per conoscere che i due punti  $A$  e  $B$  sono nella stessa condizione rispetto al sistema; e che son pure in un'identica condizione i punti  $C$  e  $D$ . Ne segue che, se  $ABCD$  è una forma armonica, sono armoniche anche le forme  $BACD, ABDC, BADC$ , che si deducono da quella scambiando fra loro  $A$  con  $B$ , ovvero  $C$  con  $D$ . Perciò (N° 43) la forma  $ABCD$  è, a cagion d'esempio, proiettiva alla forma  $BADC$ , cioè si potrà passare da quella a questa mediante un numero limitato di proiezioni e sezioni. Infatti, proiettando  $ABCD$  da  $K$  sopra  $CQ$ , si ottiene la forma  $LNCQ$ ; poi proiettando questa da  $M$  sopra  $AB$ , si ottiene  $BACD$ .

46. Dico che nella forma armonica  $ABCD$  i punti  $A$  e  $B$  sono necessariamente separati (N° 44) mediante gli altri due. Infatti, si proietti (fig. 22<sup>a</sup>) la forma  $ABCD$  sulla retta  $KM$ , prima dal centro  $L$ , poi dal centro  $N$ ; le proiezioni che ne risultano sono le forme  $KMQD, MKQD$ . Queste dovranno presentare la stessa maniera di separazione, giacchè constano degli stessi elementi: dunque

i punti  $K, M$  sono separati mediante  $Q, D$ ; epperò  $A, B$  sono separati mediante  $C, D$ .

47. Conducansi (fig. 26<sup>a</sup>) le rette  $AQ, BQ$  che incontrino  $NK$  ed  $LM, KL$  ed  $MN$  rispettivamente ne' punti  $S, U, T, V$ . Il quadrangolo completo  $LTQU$  ha due lati opposti concorrenti in  $A$ , altri due (pure opposti) concorrenti in  $B$ , e il quinto lato ( $LQ$  ossia  $LN$ ) passante per  $C$ ; dunque il sesto lato  $TU$  passerà per  $D$  (N° 38). Così pure passerà per  $D$  il sesto lato  $VS$  del quadrangolo completo  $NVQS$ ; e passeranno per  $C$  i sesti lati  $ST, UV$  de' quadrangoli completi  $KSQT, MUQV$ . Per tal modo si ottiene un quadrangolo  $STUV$ , del quale due lati opposti concorrono in  $C$ , altri due pure opposti si segano in  $D$ , mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per  $A, B$ . Ciò significa che la condizione comune (N° 45) ai punti  $C, D$  è la stessa che quella comune ai punti  $A$  e  $B$ ; vale a dire, la coppia  $A, B$  può essere scambiata colla coppia  $C, D$ . Dunque se  $ABCD$  è una forma armonica, non solo sono armoniche le forme  $BACD, ABDC, BADC$ , ma eziandio le forme  $CDAB, CDBA, DCAB, DCBA$  (1).

I punti  $A$  e  $B$  diconsi conjugati fra loro, e conjugati per conseguenza anche i punti  $C$  e  $D$ .

Si dice che i punti  $A, B$  sono separati armonicamente mediante i punti  $C, D$ ; ovvero che i punti  $C, D$  sono separati armonicamente mediante  $A$  e  $B$ ; che il segmento  $AB$  è diviso armonicamente dai punti  $C, D$  o dal segmento  $CD$ , ecc. Se due punti dati  $A, B$  (fig. 22<sup>a</sup>) sono separati armonicamente mediante i punti  $C, D$  in cui la congiungente  $AB$  è segata da due rette  $QC, QD$ , si suole ancora dire che i punti  $A, B$  sono armonicamente separati mediante le rette  $QC, QD$ , ovvero mediante il punto  $C$  e la retta  $QD$ , ecc.; e che le rette  $QC, QD$  sono armonicamente separate mediante i punti  $A, B$ , ecc.

Analoghe proprietà e denominazioni valgono per quattro raggi o per quattro piani armonici.

48. Dalla proposizione del N° 38 (sinistra) si può anche cavare il seguente enunciato: In un quadrilatero completo, ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due (2).

(1) REYE, *Geometrie der Lage* (Hannover 1866), t. I, p. 34.

(2) CARNOT, *Géométrie de position* (Paris 1803), N° 225. — Cfr. BALTZER, *Trigonometria*, p. 447.

Sia per esempio il quadrilatero completo (fig. 27\*) i cui vertici opposti sono  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ . La diagonale  $AA'$  è incontrata in  $E, F$  dalle altre due diagonali  $BB', CC'$ . Ora si consideri il quadrangolo completo  $BB'CC'$  del quale due lati opposti concorrono in  $A$ , due altri lati opposti in  $A'$ , mentre il quinto e il sesto passano rispettivamente per  $E, F$ . Dunque i punti  $AA'$  sono separati armonicamente dai due  $E, F$ . Analogamente, la considerazione dei due quadrangoli completi  $CC'AA', AA'BB'$  conduce a concludere la medesima proprietà per gli altri due gruppi  $BB'FD, CC'DE$ .

**49.** Nel quadrangolo completo  $BB'CC'$ , i punti diagonali sono  $A, A', D$ ; ora dall'essere armonico il gruppo di punti  $BB'FD$  segue che la stessa proprietà è posseduta dal gruppo de' quattro raggi che li proiettano da  $A$  (N° 40); dunque:

In un quadrangolo completo, due lati concorrenti in un punto diagonale sono separati armonicamente mediante gli altri due punti diagonali.

Dol resto, questo teorema non è altro che il correlativo (giusta la dualità nella geometria del piano) di quello dimostrato nel N° precedente.

**50.** I teoremi del N° 38 danno subito il modo di risolvere colla sola riga i problemi:

Dati tre punti di una forma armonica, costruire il quarto punto.

**SOLUZIONE.** — Siano (fig. 22\*)  $A, B, C$  i punti dati (in linea retta), e debbano essere  $A$  e  $B$  conjugati fra loro. Tirinsi ad arbitrio due rette per  $A$  ed una per  $C$ , la quale seghi le prime due in  $L, N$ . Le congiungenti  $BL, BN$  seghino rispettivamente le  $AN, AL$  in  $M, K$ ; la congiungente  $KM$  segnerà la retta data nel punto cercato  $D$ , conjugato a  $C$  (<sup>1</sup>).

Dati tre raggi di un fascio armonico, costruire il quarto raggio.

Siano (fig. 23\*)  $a, b, c$  i raggi dati (uscanti da uno stesso centro ed in uno stesso piano), e debbano essere  $a, b$  conjugati fra loro. Per un punto  $Q$  di  $c$  conducansi ad arbitrio due rette che seghino  $a$  in  $A, R$ , e  $b$  in  $P, B$ . Le congiungenti  $AB, RP$  si segheranno in un punto  $D$  che unito col punto dato darà il raggio cercato  $d$ , conjugato a  $c$ .

**51.** Sia  $C$  (fig. 28\*) il punto di mezzo fra  $A$  e  $B$  (N° 50, a sinistra). Allora potremo disporre degli elementi arbitrari in modo che  $K$  ed  $M$  vadano a distanza infinita: e ciò col costruire un parallelogrammo  $ALBN$  sulla

(<sup>1</sup>) DELAHIRE, *Sectiones conicae* (Parisii 1385), p. 9.

diagonale  $AB$ ; l'altra diagonale  $LN$  passerà per  $C$ . Dunque il punto  $D$  cadrà all'infinito.

Viceversa, se supponiamo dati i punti  $A, B, D$ , il terzo de' quali sia all'infinito, potremo ancora costruire sulla diagonale  $AB$  un parallelogrammo  $ALBN$ ; il quarto punto  $C$ , conjugato a  $D$ , dovendo risultare dall'intersezione della retta data colla  $LN$ , sarà il punto di mezzo di  $AB$ . Dunque:

Se di quattro punti armonici  $ABCD$ , uno  $C$  è il punto di mezzo fra due punti conjugati  $A$  e  $B$ , il quarto è a distanza infinita; e viceversa, se uno è all'infinito, il suo conjugato è il punto di mezzo fra gli altri due.

52. Sia  $c$  (fig. 29<sup>a</sup>) la bisettrice dell'angolo  $ab$  (N° 50, a destra). Prendendo  $Q$  all'infinito in  $c$ , i segmenti  $AB, PR$  risultano uguali e compresi fra le parallele  $AP, BR$ , perciò il raggio  $d$  sarà perpendicolare a  $c$ . Cioè:

Se di quattro raggi armonici  $abcd$ , uno  $c$  fa angoli uguali con due conjugati  $a$  e  $b$ , il quarto  $d$  è perpendicolare a  $c$ .

Viceversa, se in un fascio armonico  $abcd$  (fig. 30<sup>a</sup>), due raggi conjugati  $c, d$  sono rettangolari, essi saranno le bisettrici degli angoli fra gli altri due. Infatti, segnando il fascio (il cui centro sia  $S$ ) con una trasversale parallela a  $d$ , la sezione  $ABCD$  è costituita da quattro punti armonici (N° 40); e siccome  $D$  è all'infinito, così  $C$  sarà il punto di mezzo fra  $A$  e  $B$  (N° 51). Dunque  $ASB$  è un triangolo isoscele, e conseguentemente  $SC$  è la bisettrice dell'angolo al vertice.

## § 9. Rapporti anarmonici.

53. Si riprenda la figura 2<sup>a</sup> che rappresenta la proiezione de' punti di una retta  $u$  sopra un'altra retta  $u'$ , fatta da un centro  $O$ ; e cerchiamo la relazione che ha luogo fra due segmenti corrispondenti  $AB, A'B'$ . I triangoli simili  $OAJ, A'OI'$  danno

$$JA : JO = I'O : I'A' \text{ (1),}$$

e analogamente dai triangoli simili  $OBI, B'OI'$  si ha

$$JB : JO = I'O : I'B',$$

donde

$$JA \cdot I'A' = JB \cdot I'B' = JO \cdot I'O,$$

(1) In tutte le equazioni fra segmenti intendiamo osservata la regola o convenzione de' segni, in virtù della quale  $AB$  e  $BA$  sono riguardate come grandezze uguali e di segno opposto; donde segue che se  $A, B, O$  sono tre punti in linea retta, si ha  $AB + BO + OA = 0$  ossia  $AB = OB - OA$ . Veggasi in proposito BALTZER, *Planim.*, pag. 468, e *Trigon.*, pag. 423.

cioè il rettangolo  $JA \cdot I'A'$  è costante, qualunque sia la coppia de' punti corrispondenti  $A, A'$ .

a) Indicata con  $k$  la costante  $JO \cdot I'O$ , avremo dunque

$$I'A' = \frac{k}{JA}, \quad I'B' = \frac{k}{JB},$$

e sottraendo

$$I'B' - I'A' = \frac{k(JA - JB)}{JA \cdot JB},$$

ma

$$I'B' - I'A' = A'B', \quad JA - JB = -AB,$$

dunque

$$A'B' = \frac{-k}{JA \cdot JB} \cdot AB.$$

b) Se si considerano quattro punti  $ABCD$  (fig. 31<sup>a</sup>) di  $u$  e le quattro proiezioni  $A'B'C'D'$ , avremo analogamente

$$A'C' = \frac{-k}{JA \cdot JC} \cdot AC,$$

$$B'C' = \frac{-k}{JB \cdot JC} \cdot BC,$$

$$A'D' = \frac{-k}{JA \cdot JD} \cdot AD,$$

$$B'D' = \frac{-k}{JB \cdot JD} \cdot BD,$$

e dividendo

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

c) Se invece  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  sono sezioni fatte con due trasversali  $s, s'$  (non situate in uno stesso piano) a quattro piani  $\alpha\beta\gamma\delta$  passanti per una stessa retta  $u$ , cioè se  $A'B'C'D'$  è una proiezione di  $ABCD$ , fatta dall'asse  $u$  (N° 4), si avrà ancora l'uguaglianza che ora si è dimostrata pel caso della proiezione dal centro  $O$ .

Infatti, seghinsi i quattro piani  $\alpha\beta\gamma\delta$  in  $A''B''C''D''$  con una retta  $s''$  che incontri tanto  $s$  quanto  $s'$ . Le rette  $AA'', BB'', CC'', DD''$

sono le intersezioni dei piani  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  col piano  $ss''$ , epperò concorrono nel punto  $S$  in cui quest'ultimo piano sega l'asse  $u$ . Analogamente  $A'A'', B'B'', C'C'', D'D''$  sono quattro rette situate nel piano  $s's''$  e concorrenti in un punto  $S'$  dell'asse  $u$ . Dunque:  $A''B''C''D''$  è una proiezione di  $ABCD$  dal centro  $S$ , ed è una proiezione di  $A'B'C'D'$  del centro  $S'$ ; onde si avrà

$$\frac{A''C''}{B''C''} : \frac{A''D''}{B''D''} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

d) Il numero

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

dicesi rapporto anarmonico o doppio-rapporto dei quattro punti (in linea retta)  $ABCD$ . Il risultato ottenuto esprime adunque il teorema:

Il rapporto anarmonico di quattro punti in linea retta non è alterato da qualsivoglia proiezione (<sup>1</sup>).

Ossia:

Due gruppi proiettivi di quattro punti  $ABCD, A'B'C'D'$  (rispettivamente situati in linea retta) hanno rapporti anarmonici uguali.

e) Il quoziente delle espressioni di  $A'C', B'C'$  (b) dà

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AJ}{BJ},$$

nella quale eguaglianza il 2° membro è il rapporto anarmonico de' quattro punti  $ABCJ$ ; dunque il 1° membro sarà il rapporto anarmonico di  $A'B'C'J$ . Ossia: il rapporto anarmonico di quattro punti  $A'B'C'J$ , l'ultimo de' quali sia all'infinito, non è altra cosa che il rapporto semplice  $A'C' : B'C'$ .

Analogamente si ha

$$\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{AJ}{BJ} : \frac{AD}{BD},$$

(<sup>1</sup>) PAPPUS, *Mathematicae Collectiones* (edizione di COMMANDINO, Venetiis 1589), lib. VII, 429. Cfr. BALTZER, *Trigon.*, pag. 439.



cioè il rapporto anarmonico di quattro punti  $A'B'J'D'$ , il terzo de' quali è all'infinito, è uguale al rapporto semplice  $B'D' : A'D'$ .

f) Di qui si trae la soluzione del problema:

Dati tre punti  $ABC$  (in linea retta), determinare un quarto punto  $D$ , in modo che il rapporto anarmonico della forma  $ABCD$  sia un numero  $\lambda$  dato in grandezza ed in segno (fig. 32\*).

SOLUZIONE. — Per  $C$  si conduca una trasversale ad arbitrio, e su di essa a partire da  $C$  prendansi due segmenti  $CA'$ ,  $CB'$ , il cui rapporto  $CA' : CB'$  sia uguale al valore  $\lambda : 1$  del dato rapporto anarmonico; e i due segmenti medesimi  $CA'$ ,  $CB'$  siano diretti nello stesso senso o in senso contrario, secondo che  $\lambda$  è positivo o negativo. Tirinsi le rette  $AA'$ ,  $BB'$ , che si seghino in  $S$ ; la parallela ad  $A'B'$  condotta per  $S$  incontrerà  $AB$  nel punto richiesto  $D$  (1).

Infatti, detto  $D'$  il punto all'infinito di  $A'B'$ , essendo  $ABCD$  una proiezione di  $A'B'C'D'$  dal centro  $S$ , il rapporto anarmonico di  $ABCD$  sarà uguale a quello di  $A'B'C'D'$ , ossia ad

$$A'C' : B'C' = \lambda.$$

g) Questa è la soluzione grafica dell'equazione

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda,$$

cioè

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} : \lambda = \mu,$$

che è quanto dire, del problema: trovare il punto  $D$  che con due punti dati  $A$  e  $B$  determina due segmenti  $AD$ ,  $BD$  (in linea retta), il cui rapporto sia un numero  $\mu$  dato in grandezza ed in segno.

Il problema proposto ammette pertanto una ed una sola soluzione. Laonde non vi possono essere due punti diversi  $D$ ,  $D_1$  tali che  $ABCD$ ,  $ABCD_1$  abbiano uguali rapporti anarmonici: i raggi  $SD$ ,  $SD_1$ , dovendo essere ambedue paralleli ad  $A'B'$ , coincidono. Ossia:

Se i gruppi  $ABCD$ ,  $ABCD_1$  hanno uguali rapporti anarmonici, il punto  $D_1$  coincide necessariamente col punto  $D$ .

(1) CHASLES, *Géométrie supérieure* (Paris 1852), p. 40.

*h)* Se due gruppi di quattro punti  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  (rispettivamente in linea retta) hanno uguali rapporti anarmonici, essi sono forme proiettive.

Infatti (N° 37) si può sempre con un numero limitato di proiezioni e sezioni passare dalla forma  $ABC$  alla forma  $A'BC$ ; sia  $D'$  il punto che nasce da  $D$  in virtù di quelle operazioni. Allora il rapporto anarmonico di  $A'B'C'D'$  sarà uguale a quello di  $ABCD$ , epperò saranno uguali i rapporti anarmonici di  $A'B'C'D'$  e  $A'B'C'D''$ . Dunque  $D''$  coincide con  $D'$ ; ossia i gruppi  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  sono proiettivi.

In altre parole: la condizione necessaria e sufficiente affinché due forme  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  (composte ciascuna di quattro punti in linea retta) siano proiettive, è l'uguaglianza (in grandezza e segno) de' loro rapporti anarmonici.

*k)* Il rapporto anarmonico di quattro punti  $ABCD$  si indica col simbolo  $(ABCD)$  <sup>(1)</sup>; laonde la proiettività delle due forme  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  si esprimerà coll'equazione

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Se due fasci di quattro raggi o di quattro piani sono rispettivamente segati da due trasversali in  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$ , l'uguaglianza

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

sarà la condizione necessaria e sufficiente affinché i due fasci siano proiettivi.

Conveniamo di denominare rapporto anarmonico di quattro raggi  $abcd$  o di quattro piani  $\alpha\beta\gamma\delta$ , appartenenti ad un fascio, il rapporto anarmonico de' quattro punti ne' quali i quattro elementi del fascio sono incontrati da una trasversale arbitraria, e di rappresentarlo con  $(abcd)$ ,  $(\alpha\beta\gamma\delta)$ . Potremo allora enunciare il teorema generale:

La condizione necessaria e sufficiente perchè siano proiettive due forme di 1<sup>a</sup> specie costituite ciascuna da quattro elementi è l'uguaglianza de' loro rapporti anarmonici.

<sup>(1)</sup> Möbius, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827), p. 246.

54. Siccome due forme armoniche sono sempre proiettive (N° 43), così dal teorema che precede si può già dedurre che il rapporto anarmonico di quattro elementi armonici è un numero costante. Infatti, se  $ABCD$  è una forma armonica, è armonica anche la forma  $BACD$  (N° 45), epperò le due forme  $ACBD$ ,  $BCAD$  sono proiettive, ossia

$$(ACBD) = (BCAD),$$

che è quanto dire

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD},$$

e di qui

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

ossia

$$(ABCD) = -1.$$

Dunque, il rapporto anarmonico di quattro elementi armonici è l'unità negativa (1).

55. Alla equazione  $(ABCD) = -1$ , ossia

$$\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0, \quad (1)$$

esprimente che i quattro punti  $ABCD$  sono armonici, si possono dare altre forme, degne d'essere notate.

a) Siccome  $AD = CD - CA$ ,  $BD = CD - CB$ , la (1) dà

$$CA (CD - CB) + CB (CD - CA) = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \right), \quad (2)$$

formola che dà il punto  $D$ , quando sono dati  $A, B, C$ .

b) Sia  $O$  il punto di mezzo del segmento  $CD$ , ossia  $OD = CO = -OC$ , epperò

$$AC = OC - OA, \quad AD = OD - OA = -(OC + OA),$$

$$BC = OC - OB, \quad BD = -(OC + OB).$$

La (1), ossia

$$\frac{AC}{AD} + \frac{BC}{BD} = 0$$

(1) MÖBIUS, l. c., p. 269.

diverrà

$$\frac{OC - OA}{OC + OA} = \frac{OB - OC}{OB + OC},$$

ossia

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC},$$

donde

$$\overline{OC}^2 = OA \cdot OB, \quad (3)$$

vale a dire: la metà del segmento  $CD$  è media proporzionale fra le distanze che i punti  $A, B$  hanno dal punto medio di  $CD$ .

L'equazione (3) mostra che i segmenti  $OA, OB$  hanno lo stesso segno, cioè il punto  $O$  non cade mai fra  $A$  e  $B$ .

c) Di qui risulta che, se per  $A, B$  si descrive un circolo (fig. 33<sup>a</sup>), sarà  $OC$  la lunghezza della tangente ad esso condotta dal punto  $O$  (1).

Dunque il circolo di diametro  $CD$  taglierà ortogonalmente il primo circolo (ossia tutt'i circoli per  $A, B$ ). E viceversa, se due circoli si incontrano ad angolo retto, essi segheranno in quattro punti armonici qualunque retta passante pel centro dell'uno o dell'altro (2).

d) La stessa formola (3) serve a risolvere il problema:

Date due coppie di punti  $AB, A'B'$ , trovare un'altra coppia  $CD$  in modo che entrambi i gruppi  $ABCD, A'B'CD$  (fig. 34<sup>a</sup>, 35<sup>a</sup>) siano armonici.

Preso ad arbitrio un punto  $G$  fuori della retta, descrivansi i circoli  $GAB, GA'B'$ , i quali si segheranno in un secondo punto  $H$ . Sia  $O$  il punto nel quale la retta data è incontrata dalla congiungente  $GH$  (3). Allora avremo nel primo circolo (4)

$$OA \cdot OB = OG \cdot OH,$$

e nel secondo

$$OA' \cdot OB' = OG \cdot OH,$$

epperò

$$OA \cdot OB = OA' \cdot OB'.$$

Dunque  $O$  è il punto medio del segmento cercato; e i punti  $C, D$  saranno le intersezioni della retta data col cerchio descritto dal centro  $O$  con un raggio uguale alla lunghezza comune delle tangenti condotte da  $O$  ai primi due circoli.

Il problema ammette soluzione reale ogniquale volta il punto  $O$  riesca esterno ai due segmenti  $AB, A'B'$ , epperò ai due circoli suddetti (fig. 34<sup>a</sup> e 35<sup>a</sup>).

(1) BALTZER, *Planim.*, p. 128. (2) BALTZER, *Trigon.*, p. 116.

(3)  $GH$  è l'asse radicale de' due circoli. BALTZER, *Planim.*, p. 178 e seg.

(4) BALTZER, *Planim.*, p. 128.

Non esiste soluzione reale quando la coppia  $AB$  è separata mediante la coppia  $A'B'$  (fig. 36<sup>a</sup>); giacchè precisamente in questo caso, il punto  $O$  riesce interno ai due segmenti.

e) De' quattro punti armonici  $ABCD$  suppongansi  $A$  e  $B$  infinitamente vicini o addirittura coincidenti. Se  $C$  è a distanza infinita,  $D$  coinciderà con  $A$  e  $B$ , perchè dev'essere il punto medio del segmento  $AB$  (N° 51). Se  $C$  è a distanza finita, distinto da  $A$  e  $B$ , ma del resto arbitrario, l'equazione (2) dà  $CD=CA=CB$ , cioè  $D$  coincide coi punti  $A$  e  $B$ .

De' quattro punti armonici  $ABCD$  suppongansi ora coincidenti  $A$  e  $C$ ; e sia  $B$  all'infinito. Dovendo allora  $A$  essere il punto medio del segmento  $CD$ , il punto  $D$  coinciderà con  $A$  e  $C$ . Se invece  $B$  è a distanza finita, distinto da  $A$  e  $C$ , ma del resto arbitrario, l'equazione (1) dà  $AD=0$ , vale a dire, il punto  $D$  coincide con  $A$  e  $C$ .

Dunque, se di quattro punti armonici due coincidono, coincide con essi anche uno degli altri due; ed il quarto rimane affatto indeterminato.

**56. TEOREMA.** — Una forma qualunque (di 1<sup>a</sup> specie) costituita da quattro elementi  $ABCD$  è proiettiva alla forma che si deduce da quella scambiando fra loro due elementi, e fra loro anche gli altri due; per esempio alla forma  $BADC$ .

**Dim.** — Infatti, siano  $ABCD$  quattro punti (fig. 37<sup>a</sup>), ed  $EFGD$  una proiezione dei medesimi, fatta da un centro  $M$  sopra una retta passante per  $D$ . Se  $N$  è l'intersezione di  $AF$  con  $CM$ , sarà  $MNGC$  una proiezione di  $EFGD$  fatta dal centro  $A$ , e sarà  $BADC$  una proiezione di  $MNGC$  fatta dal centro  $F$ . Per conseguenza (N° 35) la forma  $BADC$  è proiettiva ad  $ABCD$ . Nello stesso modo si dimostra che  $ABCD$  è proiettiva a ciascuna delle forme  $CDAB$ ,  $DCBA$  (1).

Di qui segue per esempio che, se il fascio  $abcd$  di quattro raggi è proiettivo ad  $ABCD$ , è proiettivo anche a  $BADC$ ,  $CDAB$ ,  $DCBA$ .

Ciò, se due forme di quattro elementi sono proiettive, la corrispondenza fra gli elementi può essere stabilita in quattro maniere diverse.

**57.** Il teorema che precede torna a dire che, dati quattro elementi  $ABCD$  di una forma di 1<sup>a</sup> specie, sono uguali i rapporti anarmonici

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA).$$

(1) STAUDT, I. c., p. 59.

a) Quattro elementi (di una forma di 1<sup>a</sup> specie) possono essere ordinati in 24 maniere diverse, ossia formano i 24 gruppi

<i>ABCD</i> ,	<i>BADC</i> ,	<i>CDAB</i> ,	<i>DCBA</i> ,
<i>ABDC</i> ,	<i>BACD</i> ,	<i>DCAB</i> ,	<i>CDBA</i> ,
<i>ACBD</i> ,	<i>CADB</i> ,	<i>BDAC</i> ,	<i>DBCA</i> ,
<i>ACDB</i> ,	<i>CABD</i> ,	<i>DBAC</i> ,	<i>BDCA</i> ,
<i>ADBC</i> ,	<i>DACB</i> ,	<i>BCAD</i> ,	<i>CBDA</i> ,
<i>ADCB</i> ,	<i>DABC</i> ,	<i>CBAD</i> ,	<i>BCDA</i> ,

che qui abbiamo distribuiti in sei linee. I quattro gruppi di ciascuna linea sono proiettivi fra loro (N° 56), epperò hanno lo stesso rapporto anarmonico. Se si vogliono determinare i rapporti anarmonici dei 24 gruppi, basta adunque considerare un solo gruppo per ciascuna linea, per esempio i sei gruppi della prima colonna. I sei rapporti anarmonici hanno fra loro tali relazioni che, conoscendo uno qualunque di essi, si determinano immediatamente gli altri cinque.

b) Consideriamo i due gruppi *ABCD*, *ABDC*, che differiscono fra loro per lo scambio degli ultimi due elementi. I rapporti anarmonici

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad (ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$$

sono quantità inverse, epperò

$$(ABCD) \cdot (ABDC) = 1, \quad (1)$$

$$\text{ed analogamente} \quad (ACBD) \cdot (ACDB) = 1, \quad (1)'$$

$$(ADBC) \cdot (ADCB) = 1. \quad (1)''$$

c) Essendo poi i quattro punti *ABCD* in linea retta, si ha identicamente

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0 \quad (1)$$

donde, dividendo per  $BC \cdot AD$ , si cava

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} + \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD} = 1,$$

ossia

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1,$$

(1) Infatti l'identità  $BC + CA + AB = 0$ , moltiplicata per  $AD$ , e avuto riguardo che  $AD = BD + AB$  ed anche  $AD = CD - CA$ , dà

$$BC \cdot AD + CA (BD + AB) + AB (CD - CA) = 0,$$

ossia, riducendo

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0.$$

che è quanto dire (N° 53,  $k$ )

$$\text{Analogamente sarà} \quad (ABCD) + (ACBD) = 1. \quad (2)$$

$$(ABDC) + (ADBC) = 1, \quad (2)'$$

$$(ACDB) + (ADCB) = 1. \quad (2)''$$

d) Dunque, se indichiamo con  $\lambda$  il rapporto anarmonico del gruppo  $ABCD$ , cioè se poniamo

$$(ABCD) = \lambda,$$

sarà, per la (1)

$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda},$$

e per la (2)

$$(ACBD) = 1 - \lambda.$$

Quindi per la (1)'

$$(ACDB) = \frac{1}{1 - \lambda},$$

e di qui per la (2)''

$$(ADCB) = 1 - \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

e poi, per la (1)'' o per la (2)':

$$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (1).$$

e) Se nel gruppo  $ABCD$  due punti, per esempio  $A$  e  $B$ , coincidono, si ha  $AC = BC$ ,  $AD = BD$ , epperò  $(ABCD) = (ACBD) = 1$ . Ma se  $\lambda = 1$ , gli altri rapporti anarmonici divengono  $(ACAD) = 0$ ,  $(ACDA) = \infty$ ; vale a dire:  $1, 0, \infty$  sono i valori che assume il rapporto anarmonico di quattro elementi, due de' quali coincidano.

f) Se  $(ABCD) = -1$ , sarà per le formole precedenti  $(ACBD) = 2$  e  $(ACDB) = \frac{1}{2}$ ; onde (N° 54), se il rapporto anarmonico di quattro punti ha il valore  $2$  o  $\frac{1}{2}$ , questi punti, presi in un altro ordine, formano un gruppo armonico.

**58.** Dal teorema 53,  $h$ ) esprime la condizione necessaria e sufficiente per la proiettività di due gruppi di quattro elementi, si conclude subito che:

(1) Möbius, l. c., p. 249.

Se due forme (di 1.<sup>a</sup> specie) sono proiettive, quattro elementi qualsivogliano dell'una e i quattro elementi corrispondenti dell'altra hanno uguali rapporti anarmonici (<sup>1</sup>).

In particolare, a quattro elementi armonici dell'una corrispondano quattro elementi armonici dell'altra (N° 43).

59. Siano  $AA'$ ,  $BB'$  due coppie qualunque di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive (fig. 38<sup>a</sup>); e  $I$ ,  $J$  i loro punti all'infinito. Allora avremo l'uguaglianza de' rapporti anarmonici

$$(ABIJ) = (A'B'I'J'),$$

ossia

$$(BAJI) = (A'B'I'J'),$$

ossia, perchè  $I$ ,  $J'$  sono all'infinito (N° 53, e),

$$BJ : AJ = A'I' : B'I',$$

donde si ha

$$JA \cdot I'A' = JB \cdot I'B',$$

vale a dire: il prodotto  $JA \cdot I'A'$  ha un valore costante, qualunque sia la coppia  $AA'$  di punti corrispondenti (<sup>2</sup>).

Cfr. il N° 53, dove questo teorema è dimostrato per due punteggiate prospettive.

## § 10. Costruzioni di forme proiettive.

60. Se  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sono due terne d'elementi corrispondenti in due forme proiettive (fig. 39<sup>a</sup>), qualunque sistema di operazioni (proiezioni e sezioni) per le quali da  $ABC$  si ottengano  $A'B'C'$  (N° 37), condurrà eziandio da un altro elemento qualunque  $D$  della prima forma al corrispondente elemento  $D'$  dell'altra. Infatti, se da  $D$  potesse nascere in virtù di quelle operazioni un altro elemento  $D''$ , sarebbero uguali i rapporti anarmonici  $(ABCD)$ ,  $(A'B'C'D')$ ; ma per ipotesi si ha  $(ABCD) = (A'B'C'D')$ ; dunque sarebbe  $(A'B'C'D') = (A'B'C'D'')$ , il che è assurdo se  $D'$  non coincide con  $D''$  (N° 53, g).

Nella fig. 39<sup>a</sup> le operazioni sono: una proiezione da  $S$ , una sezione con  $u$ , una proiezione da  $S'$  ed una sezione con  $u'$ .

(<sup>1</sup>) STEINER, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin 1832), p. 33.

(<sup>2</sup>) STEINER, *l. c.*, p. 40.



**61.** È facile del pari dimostrare il teorema inverso di quello del N° 58; ossia:

Date due forme di 1ª specie, se agli elementi  $ABCD \dots$  dell'una corrispondono ordinatamente gli elementi  $A'B'C'D' \dots$  dell'altra, in modo che quattro elementi qualsivogliano della prima e i quattro elementi corrispondenti dell'altra abbiano rapporti anarmonici uguali, le due forme sono proiettive.

Infatti, ogni sistema di operazioni il quale conduca dalla terna  $ABC$  alla terna  $A'B'C'$ , condurrà dall'elemento  $D$  ad un tale elemento  $D'$ , pel quale si abbia l'uguaglianza de' rapporti anarmonici  $(ABCD) = (A'B'C'D')$ . Ma per ipotesi è  $(ABCD) = (A'B'C'D)$ ; dunque  $(A'B'C'D') = (A'B'C'D)$ , epperò  $D'$  coincide con  $D$  (N° 53, *g*). Siccome la stessa conclusione vale per qualsivoglia altra coppia d'elementi corrispondenti, così rimane dimostrato che le due forme sono proiettive (N° 34).

**62.** Dal N° 60 si ricava, come caso particolare, che se in due forme proiettive (di 1ª specie) vi sono due terne corrispondenti  $ABC, A'B'C'$ , le quali siano prospettive, anche le forme date saranno prospettive.

a) Per esempio, se le forme sono due punteggiate  $ABCD \dots, A'B'C'D' \dots$ , l'ipotesi fatta equivale a supporre che le rette  $AA', BB', CC'$ , concorrano in un punto  $O$ ; dunque anche le altre rette analoghe  $DD', \dots$  passeranno per  $O$  (fig. 17ª e 31ª).

Come caso particolare, i punti  $A, A'$  coincidano (fig. 20ª), formando un punto unito (\*). Le terne  $ABC, A'B'C'$  sono prospettive, e il loro centro di proiezione è il punto comune alle  $BB', CC'$ ; dunque:

Se due punteggiate proiettive hanno un punto unito, esse sono prospettive.

Viceversa, è evidente che due punteggiate prospettive hanno sempre un punto unito.

b) Se le forme sono due fasci di raggi  $abcd \dots, a'b'c'd' \dots$  in uno stesso piano, l'ipotesi equivale a supporre che i tre punti  $aa', bb', cc'$  siano in una retta  $s$ ; dunque anche tutti gli altri punti analoghi  $dd', \dots$  cadranno nella medesima retta (fig. 18ª).

(\*) In due forme proiettive, diciamo elemento unito un elemento che coincide col suo corrispondente.

Se la retta  $s$  è tutta all'infinito, si ottiene la seguente proprietà:

Se due fasci proiettivi di raggi hanno tre coppie di raggi corrispondenti paralleli, due altri raggi corrispondenti qualsivogliano saranno pure paralleli.

L'ipotesi è verificata se i raggi  $aa'$  coincidono in un raggio unito (fig. 40<sup>a</sup>); allora la retta  $s$  è quella che unisce i punti  $bb'$ ,  $cc'$ .

Dunque: se due fasci proiettivi (in un piano) hanno un raggio unito, essi sono prospettivi.

E viceversa due fasci prospettivi di raggi (in un piano) hanno sempre un raggio unito.

c) Se l'una forma è una punteggiata  $ABCD....$  e l'altra un fascio di raggi  $abcd....$  (fig. 24<sup>a</sup>), l'ipotesi equivale a supporre che i raggi  $abc$  passino rispettivamente per  $A, B, C$ ; dunque anche  $d$  passerà per  $D, ..., ecc.$

**63.** Due punteggiate possono trovarsi in una medesima retta, vale a dire, essere sovrapposte: per esempio, se due fasci di raggi (in uno stesso piano)  $S \equiv abc....$ ,  $O \equiv a'b'c'....$  (fig. 41<sup>a</sup>) vengono segati da una medesima trasversale, questa conterrà le due punteggiate  $ABC....$ ,  $A'B'C'....$ , che saranno proiettive, se tali erano i due fasci. In tal caso, si può domandare se vi siano punti uniti, cioè se in qualche punto della trasversale coincidano due punti corrispondenti delle due punteggiate.

Per esempio (fig. 41<sup>a</sup>), se la trasversale  $s$  si conduce pel punto  $aa'$  e pel punto  $bb'$ , i punti  $AA'$  coincidono, e così pure  $BB'$ ; cioè si hanno due punti uniti. Se una punteggiata  $u$  (fig. 42<sup>a</sup>) si proietta da due centri  $S, O$  (posti in uno stesso piano con  $u$ ), sicchè ne risultino i due fasci  $abc....$ ,  $a'b'c'....$ , e se si tira poi una trasversale  $s$  pel punto ove il raggio unito  $aa'$  è incontrato da  $u$ , si ottengono le due punteggiate proiettive sovrapposte  $ABC....$ ,  $A'B'C'....$ , che hanno un solo punto unito  $AA'$ . In seguito (N° 82) vedremo che due punteggiate proiettive sovrapposte possono anche mancare affatto di punti uniti.

Analogamente due fasci di raggi possono essere concentrici, come avverrebbe se due punteggiate distinte venissero proiettate da uno stesso centro (fig. 43<sup>a</sup>); due fasci di piani possono essere coassiali, quali risultano se due punteggiate si proiettano da uno stesso asse, ecc. Segando due stelle con uno stesso piano, si ottengono due piani punteggiati sovrapposti; proiettando due piani

punteggiati da uno stesso centro, si ottengono due stelle concentriche. In tutti questi casi, le due forme di cui si tratta diconsi sovrapposte; e se sono proiettive, ha importanza la ricerca degli elementi uniti.

**64. TEOREMA.** — Due forme (di 1<sup>a</sup> specie) proiettive sovrapposte o hanno al più due elementi uniti, o hanno tutti gli elementi uniti.

**Dim.** — Infatti, se vi fossero tre elementi uniti  $ABC$ , detti  $D$  e  $D'$  due altri elementi corrispondenti qualsivogliano, si avrebbe (N° 58) l'uguaglianza  $(ABCD) = (ABCD')$ , epperò  $D'$  coinciderebbe con  $D$  (N° 53, *g*).

Dunque, se le due forme non sono identiche fra loro, esse non potranno mai avere più di due elementi uniti.

**65.** Se una forma (di 1<sup>a</sup> specie) costituita da quattro elementi  $ABCD$  è proiettiva alla forma che si deduce da quella collo scambio di due elementi, per esempio a  $BACD$ , dico che la forma è armonica, e che i due elementi scambiati sono conjugati. Questo teorema è già contenuto nel N° 54; ma si può ora darne anche la seguente dimostrazione grafica.

Supposto per esempio che  $ABCD$  siano quattro punti in linea retta (fig. 44<sup>a</sup>), sia  $KMQD$  una proiezione dei medesimi, fatta da un centro qualunque  $L$  sopra una retta passante per  $D$ . Siccome  $ABCD$  è proiettivo sì a  $KMQD$ , sì a  $BACD$ , così anche le forme  $KMQD$ ,  $BACD$  saranno proiettive. E siccome  $D$  è per esse un punto unito, così le due forme saranno prospettive (N° 62, *a*), cioè le rette  $KB$ ,  $MA$ ,  $QC$  concorreranno in uno stesso punto  $N$ . Da ciò segue che  $KLMN$  è un quadrangolo completo del quale due lati opposti concorrono in  $A$ , due altri lati opposti concorrono in  $B$ , mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per  $C$ ,  $D$ . Dunque (N° 38)  $ABCD$  sono quattro punti armonici.

**66.** Siccome il passaggio fra due forme proiettive (di 1<sup>a</sup> specie) può sempre essere effettuato (N° 60) mediante il sistema d'operazioni che servono per dedurre tre elementi dell'una dagli elementi corrispondenti dell'altra, e siccome (N° 37) due dati gruppi di tre elementi sono sempre proiettivi, cioè si può sempre passare dall'uno all'altro mediante alcune proiezioni o sezioni, così noi possiamo concludere:

Date ad arbitrio tre coppie d'elementi corrispondenti

di due forme proiettive, si possono costruire quante altre coppie si vogliono d'elementi corrispondenti (<sup>1</sup>).

Adduciamo due esempi; quello di due punteggiate, e quello di due fasci di raggi: intendendo, sì nell'un caso sì nell'altro, che le due forme siano in uno stesso piano.

Siano (fig. 39<sup>a</sup>)  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$  le tre coppie date di punti corrispondenti delle punteggiate proiettive  $u$ ,  $u'$  da costruirsi. Operiamo come s'è fatto al N° 37; cioè sulla retta che unisce due punti corrispondenti, per es.  $AA'$ , prendansi ad arbitrio due punti  $S$ ,  $S'$ ; e si conducano le  $SB$ ,  $S'B'$  che si segano in  $B''$ , e le  $SC$ ,  $S'C'$  che si segano in  $C''$ . Sia poi  $A''$  il punto in cui  $AA'$  incontra  $B''C''$ . Le operazioni che servono per passare da  $ABC$  ad  $A'B'C'$  sono: 1° la proiezione da  $S$ ; 2° la sezione colla  $u'' \equiv A''B''C''$ ; 3° la proiezione da  $S'$ ; 4° la sezione con  $u'$ . Dunque le stesse operazioni condurranno da un altro punto qualunque  $D$  di  $u$  al punto corrispondente  $D'$  di  $u'$ ; ossia i raggi  $SD$ ,  $S'D'$  si devono segare in un punto  $D''$  della retta fissa  $u''$ .

Per tal modo si ottiene una punteggiata  $u'' \equiv A''B''C''D''$  .... che è prospettiva tanto ad  $u$ , quanto ad  $u'$ .

Siano (fig. 45<sup>a</sup>)  $a$  ed  $a'$ ,  $b$  e  $b'$ ,  $c$  e  $c'$  le tre coppie date di raggi corrispondenti de' due fasci proiettivi  $U$ ,  $U'$  da costruirsi. Pel punto comune a due raggi corrispondenti, per es.  $aa'$ , conducansi ad arbitrio due trasversali  $s$ ,  $s'$ ; e sia  $b''$  la retta che unisce i punti  $sb$ ,  $s'b'$ ;  $c''$  la retta che unisce i punti  $sc$ ,  $s'c'$ ; ed  $a''$  la retta che unisce i punti  $aa'$  e  $b''c''$ . Le operazioni che servono per passare da  $abc$  ad  $a'b'c'$  sono: 1° la sezione con  $s$ ; 2° la proiezione dal punto  $U''$  comune alle  $a''b''c''$ ; 3° la sezione colla  $s'$ ; 4° la proiezione da  $U'$ . Dunque le stesse operazioni condurranno da un altro raggio qualunque  $d$  del fascio  $U$  al corrispondente raggio  $d'$  del fascio  $U'$ ; ossia i punti  $sd$ ,  $s'd'$  devono trovarsi sopra una retta  $d''$  passante pel punto fisso  $U''$ .

Per tal modo si ottiene un fascio  $U'' \equiv a''b''c''d''$  .... che è prospettivo tanto ad  $U$ , quanto ad  $U'$ .

a) Il raggio passante per  $S$  (fig. 39<sup>a</sup>) e parallelo ad  $u$  sega  $u''$  in  $I''$ ; il raggio  $S'I''$  segnerà  $u'$  nel punto  $I'$ , il cui corrispondente in  $u$  è all'infinito.

Analogamente, se il raggio passante per  $S'$  e parallelo ad  $u'$  sega  $u''$  in  $J''$ , il raggio  $S'J''$  segnerà  $u$  nel punto  $J$ , il cui corrispondente in  $u'$  è all'infinito.

b) Sia  $P$  (fig. 39<sup>a</sup>) il punto in cui  $u$  è segata da  $u''$ ; il punto  $P'$  sarà l'intersezione di  $u'$  col raggio  $S'P$ . Parimenti, se  $Q'$  è il punto in cui  $u'$  è incontrata da  $u''$ , il punto  $Q$  sarà quello ove  $u$  è segata dal raggio  $SQ'$ .

Dicasi  $p$  (fig. 45<sup>a</sup>) il raggio  $UU''$ ; il raggio corrispondente  $p'$  congiungerà  $U'$  col punto  $s'p$ . Così pure, se il raggio  $UU''$  s'indica con  $q'$ , la congiungente di  $U$  col punto  $sq'$  sarà il raggio  $q$ .

(<sup>1</sup>) STEINER, l. c., p. 35 e 94.

**67.** I centri  $S, S'$  devono essere allineati con due punti corrispondenti; del resto sono arbitrari. Per es., possiamo porre  $S$  in  $A'$ , ed  $S'$  in  $A$  (fig. 47<sup>a</sup>). Allora il raggio  $SP$  coincide con  $u$ , epperò  $P'$  diviene il punto comune ad  $u, u'$ . Così pure il raggio  $SQ'$  coincide con  $u'$ , cioè anche  $Q$  cade nel punto  $uu'$ .

Vale a dire: se assumiamo i punti  $A', A$  invece de' centri  $S, S'$ , la retta  $u''$  incontrerà rispettivamente le  $u, u'$  in quei punti  $P, Q'$  che corrispondono al punto  $uu'$ , considerato prima come un punto  $P'$  di  $u'$ , poi come un punto  $Q$  di  $u$ .

Ma nella costruzione del N° precedente, la retta  $u''$  era il luogo delle intersezioni de' raggi corrispondenti de' fasci prospettivi  $S(ABCD...), S'(A'B'C'D'...)$ . Dunque la retta  $u''$  attuale sarà analogamente la sezione comune de' fasci  $A'(ABCD...), A(A'B'C'D'...)$ , cioè il luogo de' punti ove si segano le coppie di rette  $A'B$  ed  $AB', A'C$  ed  $AC', A'D$  ed  $AD', ...$

Se invece de' punti  $A', A$ , adoperiamo come centri di proiezione altri due punti come  $B'$  e  $B$ , o  $C'$  e  $C$ , ..., la retta  $u''$  dovrà ancora segare le  $u, u'$  ne' punti  $P, Q'$ ; cioè la retta  $u''$  rimane la medesima. Dunque:

Se  $ABC...MN..., A'B'C'...M'N'...$  sono due punteggiate proiettive (in uno stesso piano), tutte le coppie di rette analoghe a  $M'N, MN$  si segano in punti di una retta fissa, la quale passa pei punti delle due punteggiate che corrispondono al loro punto d'intersezione.

**68.** Questo teorema, limitato alle tre coppie di punti  $AA', BB', CC'$ , le quali del resto sono affatto arbitrarie, può enunciarsi così:

Le trasversali  $s, s'$  devono passare pel punto comune a due raggi corrispondenti; del resto sono arbitrarie. Per es., possiamo assumere  $a'$  per  $s$  ed  $a$  per  $s'$  (fig. 46<sup>a</sup>). Allora il punto  $s'p$  coincide con  $U$ , epperò  $p'$  sarà la retta  $UU'$ . Parimenti, il punto  $sq'$  coincide con  $U'$ , cioè anche  $q$  non è altro che la retta  $UU'$ .

Vale a dire: se assumiamo i raggi  $a', a$  invece delle trasversali  $s, s'$ , il punto  $U''$  sarà l'intersezione de' raggi  $p, q'$  che corrispondono alla  $UU'$ , considerata prima come raggio  $p'$  del fascio  $U'$ , poi come raggio  $q$  del fascio  $U$ .

Ma nella costruzione del N° precedente, il punto  $U''$  era il centro di proiezione per le punteggiate prospettive  $s(abcd...), s'(a'b'c'd'...)$ . Dunque l'attuale punto  $U''$  sarà analogamente il centro di proiezione per le punteggiate  $a'(abcd...), a(a'b'c'd'...)$ , cioè il punto comune alle rette che congiungono le coppie di punti  $a'b$  ed  $ab', a'e$  ed  $ae', a'd$  ed  $ad'$ , ecc.

Se invece de' raggi  $a', a$ , si adoperano come trasversali altri due raggi come  $b'$  e  $b$ , ovvero  $c'$  e  $c$ , ..., il punto  $U''$  sarà ancora l'intersezione de' raggi  $p, q'$ , cioè il punto  $U''$  non cambia. Dunque:

Se  $abc...mn..., a'b'c'...m'n'...$  sono due fasci proiettivi di raggi (in uno stesso piano), le rette che uniscono le coppie di punti analoghe ad  $mn, m'n$  passano tutte per un punto fisso, il quale è l'intersezione de' raggi che corrispondono alla congiungente de' centri de' due fasci.

Questo teorema, ristretto alle tre coppie di raggi  $aa', bb', cc'$ , le quali del resto sono affatto arbitrarie, può enunciarsi così:

Se un esagono  $ABCA'BC'$  (fig. 48<sup>a</sup>) ha i vertici d'ordine dispari in una retta  $u$ , e i vertici d'ordine pari in un'altra retta  $u'$ , le tre coppie di lati opposti ( $AB'$  ed  $A'B$ ,  $BC'$  e  $BC$ ,  $CA'$  e  $CA$ ) si segano in tre punti di una retta  $u''$  (\*).

**69.** Se le due punteggiate  $u, u'$  sono prospettive (fig. 50<sup>a</sup>), i punti  $P$  e  $Q'$  coincidono in un solo punto  $O$  comune alle due rette; allora  $AA'BB'$  è un quadrangolo completo, i cui punti diagonali sono  $O, S$  (punto di concorso delle  $AA', BB', \dots$ ) ed  $M$  (intersezione delle  $AB', A'B$ ); perciò (N° 49) le rette  $u, u'$  sono separate armonicamente mediante la  $u''$  e la  $OS$ . Dunque:

Se due trasversali  $u, u'$  segano un fascio di raggi  $a, b, c, \dots$  ne' punti ( $A, A'$ ), ( $B, B'$ ), ( $C, C'$ ), ... i punti ove si segano le coppie di rette  $AB'$  e  $A'B$ ,  $AC'$  e  $A'C$ ,  $BC'$  e  $B'C$ , ecc., cadranno in una retta fissa  $u''$  passante pel punto  $u''$ ; e le  $u, u'$  saranno separate armonicamente mediante  $u''$  e il centro del fascio.

a) Di qui si cava la soluzione del problema:

Condurre la retta che unisce un punto dato  $M$  col punto inaccessibile di concorso di due rette date  $u, u'$ .

Per  $M$  (fig. 50<sup>a</sup> e 51<sup>a</sup>) conducansi due rette a segare  $u$  in  $A, B$  ed  $u'$  in  $B', A'$ ; dal punto  $S$  ove si segano  $AA'$  e  $BB'$  menisi un'altra retta ad incontrare  $u, u'$  in  $C, C'$ . Il punto  $N$  comune alle  $BC', B'C$  apparterrà alla retta domandata  $u''$ .

Se un esagono  $ab'ca'bc'$  (fig. 49<sup>a</sup>) ha i lati d'ordine dispari concorrenti in un punto  $U$ , e i lati d'ordine pari concorrenti in un altro punto  $U'$ , le rette congiungenti le tre coppie di vertici opposti ( $ab'$  ed  $a'b$ ,  $b'c$  e  $bc'$ ,  $ca'$  e  $c'a$ ) passano per uno stesso punto  $U''$ .

Se i due fasci  $U, U'$  sono prospettivi (fig. 52<sup>a</sup>), i raggi  $p$  e  $q'$  coincidono nella retta  $UU'$ ; allora  $aa'bb'$  è un quadrilatero completo, le cui diagonali sono  $UU', s$  (sezione comune de' due fasci) ed  $m$  (congiungente de' punti  $ab', a'b$ ); perciò (N° 48) i punti  $U, U'$  sono divisi armonicamente mediante il punto  $U''$  e la retta  $s$ . Dunque:

Se una punteggiata è proiettata da due punti  $U, U'$  mediante i raggi ( $a, a'$ ), ( $b, b'$ ), ( $c, c'$ ), ... le rette che uniscono le coppie di punti ( $ab', a'b$ ), ( $ac', a'c$ ), ( $bc', b'c$ ), ecc., concorrono in un punto fisso  $U''$ , il quale insieme con  $s$  divide armonicamente  $UU'$ .

Di qui si cava la soluzione del seguente problema:

Costruire il punto che giace in una retta tracciata  $m$  ed in un'altra retta non tracciata, ma individuata da due punti dati  $U, U'$ .

In  $m$  (fig. 52<sup>a</sup>) prendansi due punti, i quali uniti ad  $U$  diano le rette  $a, b$ , e uniti ad  $U'$  le rette  $b', a'$ , e sulla retta  $s$  che unisce i punti  $aa', bb'$  prendasi un terzo punto, che unito ad  $U, U'$  dia le rette  $c, c'$ . La retta  $n$  che unisce i punti  $bc', b'c$  segnerà  $m$  nel punto richiesto  $U''$ .

(\*) PAPP, I. c., lib. VII, 433.

b) Se le  $u$ ,  $u'$  sono parallele (fig. 51<sup>a</sup>), la costruzione precedente risolve il problema:

Date due rette parallele, condurre coll'uso della sola riga per un punto dato la retta parallela alle date.

**70.** Tornando alla costruzione del N° 66 (a sinistra), prendasi come centro  $S$  il punto in cui  $AA'$  è segata da  $BB'$ , e come centro  $S'$  il punto comune alle  $AA'$ ,  $CC'$  (fig. 53<sup>a</sup>). Allora la retta  $u''$  non sarà altro che la  $BC$ , perchè in  $B'$  si segano i raggi  $SB$ ,  $S'B'$ , ed in  $C$  i raggi  $SC$ ,  $S'C'$ . Perciò si costruirà un'altra coppia qualunque di punti corrispondenti  $D$ ,  $D'$ , osservando che le rette  $SD$ ,  $S'D'$  devono concorrere sulla  $BC$ .

Considerando la figura  $SS'CDDB'$  che è un esagono, possiamo enunciare il teorema:

In un esagono, i cui lati siano due rette punteggiate proiettive e le congiungenti di quattro coppie di punti corrispondenti, le tre rette che uniscono a due a due i vertici opposti concorrono in uno stesso punto.

**71.** Nella soluzione del problema del N° 66 (a sinistra) se le tre congiungenti  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  avessero un punto comune  $S$  (come caso particolare, se  $AA'$  coincidessero), nel qual caso le due punteggiate sarebbero prospettive, basterebbe tirare i raggi per  $S$  e si otterrebbero tutte le coppie di punti corrispondenti (fig. 17<sup>a</sup>).

Tornando alla costruzione del N° 66 (a destra), prendasi come trasversale  $s$  la retta che unisce i punti  $aa'$ ,  $bb'$ , e come trasversale  $s'$  la retta che unisce i punti  $aa'$ ,  $cc'$  (fig. 54<sup>a</sup>). Allora il punto  $U''$  sarà l'intersezione  $b'c$ , perchè  $b'$  congiunge i punti  $sb$ ,  $s'b'$ , e  $c$  congiunge i punti  $sc$ ,  $s'c'$ . Perciò si costruirà un'altra coppia qualsivoglia di raggi corrispondenti  $d$ ,  $d'$ , osservando che i punti  $sd$ ,  $s'd'$  devono essere in linea retta con  $b'c$ .

Considerando ora la figura  $ss'edd'b'$  che è un esagono, potremo enunciare il teorema:

In un esagono, i cui vertici siano i centri di due fasci proiettivi e le intersezioni di quattro coppie di raggi corrispondenti, i tre punti in cui si segano a due a due le coppie di lati opposti sono in linea retta.

Se i tre punti  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  (N° 66, a destra) fossero in una stessa retta  $s$  (come caso particolare, se  $aa'$  coincidessero), nel qual caso i due fasci sarebbero prospettivi, basterebbe congiungere i centri de' due fasci a ciascun punto di  $s$  e si otterrebbero tutte le coppie di raggi corrispondenti (fig. 18<sup>a</sup>).

**72.** Se le due punteggiate  $u$ ,  $u'$  (N° 66, a sinistra) dovessero essere sovrapposte, cioè se i sei punti dati  $AA'BB'CC'$  fossero in una stessa retta (fig. 55<sup>a</sup>), si comincerebbe dal proiettare  $u'$  da un centro arbitrario  $S'$  sopra una retta arbitraria  $u_1$ , e quindi si opererebbe sulle punteggiate  $u \equiv (ABC...)$ ,  $u_1 \equiv (A_1B_1C_1...)$ , cioè sulle coppie di punti  $(A, A_1)$ ,  $(B, B_1)$ ,  $(C, C_1)$ , nel modo insegnato di sopra (N° 66). Trovata una coppia di punti corrispondenti

( $D, D_1$ ) delle punteggiate  $u, u_1$ , il raggio  $S'D_1$  determinerebbe in  $u'$  il punto  $D'$  corrispondente a  $D$ .

a) La costruzione sarebbe semplificata, se due punti corrispondenti  $A, A'$  coincidessero (fig. 56<sup>a</sup>), giacchè allora, conducendo  $u_1$  per  $A$ , la punteggiata  $u_1$  riesce prospettiva ad  $u$ ; ond'è che, proiettata  $u'$  dal centro arbitrario  $S'$  su  $u_1$ , se le  $BB_1, CC_1$  si segano in  $S$ , basterà proiettare  $u$  da  $S$  su  $u_1$ , e quindi  $u_1$  da  $S'$  su  $u'$ .

Le due punteggiate proiettive sovrapposte  $u, u'$  hanno, oltre ad  $A$  od  $A'$ , un altro punto nnito, nell'intersezione della retta data col raggio  $SS'$ .

b) Dunque, se il raggio  $SS'$  passa pel punto  $uu_1$ , le due punteggiate proiettive  $u, u'$  avranno un solo punto unito. Se si volessero costruire in una retta data due punteggiate proiettive (sovrapposte), per le quali  $AA'$  fosse una coppia di punti corrispondenti ed  $M$  fosse l'unico punto unito (fig. 56<sup>a</sup> bis), da un punto  $S'$  arbitrario si proietterebbe  $A'$  in  $A_1$  sopra una retta  $u_1$  condotta arbitrariamente per  $M$ ; indi, costruito il punto  $S$  comune alle  $AA_1, S'M$ , per trovare il punto  $B'$  di  $u'$  corrispondente ad un punto  $B$  di  $u$ , si proietterebbe  $B$  da  $S$  in  $B_1$ , e quindi  $B_1$  da  $S'$  in  $B'$ .

c) Se i due fasci  $U, U'$  (N° 66, a destra) debbono essere sovrapposti, cioè se i sei raggi dati  $aa'bb'cc'$  passano per uno stesso punto, si comincerà dal segare  $a'b'c'$  con una trasversale, indi si proietteranno i punti d'intersezione da un centro arbitrario  $U_1$ . Se i raggi proiettanti sono  $a_1b_1c_1 \dots$ , avremo a considerare i due fasci non sovrapposti  $U, U_1$ .

Ovvero, potremo segare  $abc$  con una trasversale in  $ABC$ , ed  $a'b'c'$  con un'altra trasversale in  $A'B'C'$ ; indi si opererà sulle punteggiate  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  nel modo che si è già esposto.

Omettiamo le figure corrispondenti a queste costruzioni, affinchè il giovane studioso cominci ad esercitarsi a farle da sè. Anche qui si avrebbe una notevole semplificazione, se fra i raggi dati ve ne fosse uno unito, cioè se per es.  $a$  ed  $a'$  coincidessero insieme, ecc.

## § 11. Casi particolari ed esercizi.

**73.** Due punteggiate diconsi simili, se ai punti  $ABC \dots$  dell'una corrispondono i punti  $A'B'C' \dots$  dell'altra, in modo che il rapporto di due segmenti corrispondenti  $AB$  e  $A'B', AC$  e  $A'C', \dots$  sia un numero costante. Se questo numero è l'unità, le punteggiate diconsi uguali.

Due punteggiate simili sono proiettive, perchè ogni rapporto anarmonico, come  $(ABCD)$ , sarà uguale al suo corrispondente  $(A'B'C'D')$ . Oppure: suppongansi le due rette in uno stesso piano (fig. 57<sup>a</sup>), e dicasi  $P'$  o  $Q$  il punto ad esse comune, secondo che



si considera come appartenente ad  $u'$  o ad  $u$ . Sia poi  $AA'$  una coppia qualunque di punti corrispondenti;  $P$  il punto di  $u$  che corrisponde a  $P'$ ; e  $Q'$  il punto di  $u'$  che corrisponde a  $Q$ . Conducansi  $AA''$  parallela ad  $u'$ , e  $A'A''$  parallela ad  $u$ . Nei triangoli  $PQQ'$ ,  $PAA''$  gli angoli in  $Q$ ,  $A$  sono uguali e racchiusi da lati proporzionali, in virtù dell'ipotesi

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PA}{P'A'} = \frac{PA}{AA''}.$$

Segue di qui che i punti  $P$ ,  $Q'$ ,  $A''$  sono in linea retta; dunque, se la punteggiata  $ABC \dots$  si proietta su  $PQ'$  in  $A'B'C' \dots$  mediante rette parallele ad  $u'$ , e quindi se si proietta la punteggiata  $A'B'C' \dots$  sulla  $u'$  mediante rette parallele ad  $u$ , si otterrà la punteggiata  $A'B'C' \dots$

Se  $PQ = P'Q'$ , cioè se la retta  $PQ'$  fa angoli uguali colle rette date, le punteggiate  $u$ ,  $u'$  sono uguali.

Al punto all'infinito di  $u$  corrisponde il punto all'infinito di  $u'$ .

74. Viceversa: se i punti all'infinito  $I$ ,  $I'$  di due punteggiate proiettive  $u$ ,  $u'$  sono corrispondenti, le punteggiate sono simili. Infatti (fig. 57<sup>a</sup>), se si proietta  $u$  da  $I'$ , ed  $u'$  da  $I$  (come nel N° 67, a sinistra), si ottengono due fasci di raggi paralleli, ne quali i raggi corrispondenti si segano sulla retta fissa  $u''$ . I segmenti  $A'B'$  di  $u'$  risultano allora proporzionali sì ai segmenti  $AB$  di  $u$ , sì ai segmenti  $A'B'$  di  $u'$ ; epperò i segmenti  $AB$  di  $u$  sono proporzionali ai segmenti  $A'B'$  di  $u'$ .

O altrimenti: se  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sono tre coppie di punti corrispondenti, e se  $I$ ,  $I'$  sono i punti all'infinito, avremo l'uguaglianza de' rapporti anarmonici (N° 58)

$$(ABCI) = (A'B'C'I'),$$

ossia, perchè  $I$ ,  $I'$  sono all'infinito (N° 53, e),

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'},$$

equazione che esprime appunto la proporzionalità de' segmenti corrispondenti.

**ESEMPI.** — Segando un fascio di raggi (il cui centro sia a distanza finita) con due trasversali parallele, si hanno due punteggiate simili.

Due sezioni qualsivogliano di un fascio di raggi paralleli sono punteggiate simili.

In entrambi questi esempi, le punteggiate sono anche prospettive; il punto unito è a distanza infinita nel primo caso, a distanza finita (in generale) nel secondo.

**75.** Due fasci proiettivi di raggi, i cui centri siano l'uno e l'altro all'infinito, diconsi simili, se una sezione dell'uno è simile ad una sezione dell'altro. Allora due altre sezioni qualsivogliano de' due fasci saranno pure simili fra loro.

**76.** Dall'eguaglianza de' rapporti anarmonici si deduce che due punteggiate uguali sono proiettive (N° 61); e che viceversa due punteggiate proiettive sono uguali (N° 53, *g*) tostochè siano uguali i segmenti corrispondenti compresi fra i punti di due terne  $ABC$ ,  $A'B'C'$  corrispondenti, cioè  $A'B' = AB$ ,  $A'C' = AC$  (epperò  $B'C' = BC$ ).

**ESEMPI.** — Se un fascio di raggi paralleli è segato da due trasversali ugualmente inclinate ai raggi, si ottengono due punteggiate uguali.

Se un fascio di raggi (non paralleli) è segato da due trasversali parallele ed equidistanti dal centro del fascio, le due punteggiate che ne risultano sono uguali.

**77.** Due punteggiate simili sovrapposte, avendo già un punto unito  $N$  a distanza infinita, ne hanno un altro  $M$ , che in generale è a distanza finita. Se  $AA'$ ,  $BB'$  sono due coppie di punti corrispondenti, si avrà:

$$MA : MA' = AB : A'B' = \text{cost.}^*,$$

onde basterà dividere il segmento  $AA'$  in due parti  $MA$ ,  $MA'$  aventi fra loro un rapporto dato.

La frazione  $MA : MA'$  è (N° 53, *e*) il rapporto anarmonico ( $AA'MN$ ). Se il suo valore è  $-1$ , il gruppo  $AA'MN$  sarà armonico (N° 54), cioè  $M$  sarà (N° 51) il punto di mezzo di  $AA'$  e d'ogni altro segmento analogo  $BB'$ , ...; vale a dire le due punteggiate sono costituite dalle coppie di punti equidistanti da un punto fisso  $M$ .

Ma se quel rapporto costante ha il valore  $+1$ , cioè se  $MA$  ed  $MA'$  devono essere uguali di grandezza e di segno, il punto  $M$  sarà all'infinito. Infatti, dall'essere ( $AA'MN$ )  $= 1$  segue ( $NMA'A$ )  $= 1$  (N° 56), epperò (N° 57, *e*) i punti  $M$ ,  $N$  coincidono insieme.

Che due punteggiate proiettive sovrapposte, dotate di un solo punto unito, posto a distanza infinita, siano uguali, ri-

solta anche dalla costruzione del N° 72, è (fig. 56<sup>a</sup> bis). Se il punto  $M$  va all'infinito, le rette  $SS'$ ,  $A_1B_1$  divengono parallele alla retta data  $u$  od  $u'$  (fig. 56<sup>a</sup> ter); e siccome i triangoli  $SA_1B_1$ ,  $S'A_1B_1$  hanno una base comune, parallela alla retta dei vertici, i segmenti intercetti da essi in qualunque parallela alla base saranno uguali; dunque  $AB = A'B'$ , ossia due segmenti corrispondenti sono uguali; epperò  $AA' = BB'$ , ecc., cioè il segmento fra due punti corrispondenti è costante. Le due punteggiate si possono dunque supporre generate da un segmento  $AA'$  dato di grandezza e senso, il quale scorra su di una retta data; il termine  $A$  descrive l'una punteggiata, il termine  $A'$  descrive l'altra.

Viceversa, è evidente che, se un segmento  $AA'$  dato di grandezza e senso scorre su di una retta data, i suoi termini  $A$ ,  $A'$  descriveranno due punteggiate uguali, epperò proiettive, dotate di un solo punto unito, che sarà a distanza infinita.

**78.** Due fasci di raggi diconsi uguali, se agli elementi dell'uno corrispondono ordinatamente gli elementi dell'altro, in modo che l'angolo di due elementi qualsivogliano della prima forma sia sempre uguale all'angolo degli elementi corrispondenti.

È evidente che due fasci uguali si possono segare con due trasversali in modo che le punteggiate risultanti siano uguali; ma due punteggiate uguali sono sempre proiettive; dunque anche due fasci uguali sono sempre proiettivi.

Viceversa, due fasci proiettivi di raggi  $abcd$  ...,  $a'b'c'd'$  ... saranno uguali quando tre raggi  $abc$  dell'uno e i tre corrispondenti raggi  $a'b'c'$  dell'altro costituiscano due figure uguali: il che si dimostra ancora segnando i due fasci con due trasversali, in modo che le sezioni  $ABC$ ,  $A'B'C'$  dei gruppi  $abc$ ,  $a'b'c'$  siano uguali. Le punteggiate proiettive che ne risultano sono uguali (N° 76), epperò sono uguali anche gli altri angoli corrispondenti  $ad$  ed  $a'd'$ , ... de' fasci proposti.

**79.** Poichè due forme (due punteggiate o due fasci) uguali sono sempre proiettive, così possiamo concludere che, se una punteggiata o un fascio vien trasportato nello spazio, senza che si alteri la scambievole giacitura de' suoi elementi, la punteggiata o il fascio nella sua nuova posizione sarà proiettivo alla forma stessa nella posizione primitiva.

**80.** Dati in uno stesso piano due fasci uguali di raggi  $abcd$  ...,  $a'b'c'd'$  ..., se un raggio dell'un fascio ruota intorno al suo centro descrivendo il fascio medesimo, il raggio corrispondente descriverà

l'altro fascio con una rotazione dello stesso senso o di senso opposto. Nel primo caso i due fasci diconsi direttamente uguali, nel secondo inversamente uguali.

a) Nel primo caso, è evidente che gli angoli  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ... sono tutti uguali (in grandezza e in senso). Perciò due raggi corrispondenti o saranno sempre paralleli o non lo saranno mai.

b) Nel secondo caso, due angoli corrispondenti  $ab$ ,  $a'b'$  sono uguali in grandezza, ma di senso opposto. Perciò, se si trasporta l'un fascio parallelamente a sè stesso, sinchè i due centri coincidano, le bisettrici degli angoli di due raggi corrispondenti  $a$ ,  $a'$  saranno evidentemente i raggi uniti de' due fasci sovrapposti, che sono ancora proiettivi (N° 79); donde segue che questi raggi saranno anche le bisettrici degli angoli di qualunque altro paio di raggi corrispondenti. Perciò, se i due fasci si suppongono di nuovo non concentrici, essi hanno due coppie di raggi corrispondenti paralleli; e i due raggi in ciascun fascio sono fra loro perpendicolari, giacchè hanno le direzioni delle bisettrici degli angoli d'una coppia qualunque di raggi corrispondenti.

81. Se due fasci di raggi  $abcd$ ...,  $a'b'c'd'$ ... sono proiettivi, e se sono uguali in grandezza e in senso gli angoli  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  di tre coppie di raggi corrispondenti, avrà la stessa grandezza e lo stesso senso anche l'angolo  $dd'$  di due altri raggi corrispondenti qualunque. Infatti, si trasporti il primo fascio parallelamente a sè stesso, finchè riesca concentrico al secondo; e poi si faccia girare lo stesso primo fascio intorno al centro comune, di un angolo uguale ad  $aa'$ : allora i raggi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  coincideranno rispettivamente coi raggi  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ; e i due fasci, che non cessano d'essere proiettivi (N° 79), avranno tre raggi uniti, e conseguentemente (N° 64) ogni altro raggio coinciderà del pari col suo corrispondente. Dunque, restituendo il primo fascio alla sua primitiva posizione, l'angolo  $dd'$  sarà uguale ad  $aa'$ .

82. Dall'essere uguali gli angoli  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,... in due fasci direttamente uguali consegue che due fasci direttamente uguali, i quali abbiano lo stesso centro  $O$ , si possono supporre generati dalla rotazione di un angolo  $aa'$  di grandezza invariabile intorno al suo vertice fisso  $O$ : l'un lato  $a$  genera l'un fascio, l'altro lato  $a'$  l'altro fascio.

Viceversa, se un angolo di grandezza invariabile gira intorno

al proprio vertice, i due lati generano due fasci (direttamente) uguali, epperò proiettivi. È evidente che questi fasci proiettivi non hanno alcun raggio unito.

Seguendo i due fasci con una trasversale, si otterranno in questa due punteggiate proiettive sovrapposte, senza punti uniti.

Le cose esposte ai N° 78-81 per due fasci di raggi contenuti in uno stesso piano si potrebbero ripetere senza mutazione alcuna per due fasci di piani nello spazio a tre dimensioni.

83. Due punteggiate proiettive sovrapposte in una stessa retta,  $ABC\dots$ ,  $A'B'C'\dots$  vengano proiettate da due centri diversi  $U, U'$ , mediante i fasci  $abc\dots, a'b'c'\dots$ . Siano  $i, j$  i raggi paralleli alla retta data, passanti rispettivamente per  $U, U'$ ; ed  $i', j'$  i raggi corrispondenti a quelli. I punti  $I, J$ , nei quali gli ultimi due raggi segano la retta data saranno pertanto i punti che corrispondono al punto all'infinito ( $I$  o  $J$ ) della retta data, secondo che questo si consideri come punto della punteggiata  $ABC\dots$ , o come punto della punteggiata  $A'B'C'\dots$ .

Per la proiettività di due gruppi corrispondenti abbiamo (N° 59) un'eguaglianza di rapporti anarmonici, dalla quale si deduce

$$JA \cdot IA' = JB \cdot IB' = \text{cost.} \quad (1)$$

cioè il prodotto  $JA \cdot IA'$  è una quantità costante, qualunque sia la coppia  $AA'$ . Sia  $O$  il punto di mezzo del segmento  $II'$ , ed  $O'$  il punto che corrisponde ad  $O$  riguardato come punto della prima punteggiata. Siccome l'equazione (1) sussiste per ogni coppia di punti corrispondenti, epperò anche per  $OO'$ , così avremo

$$JA \cdot IA' = JO \cdot IO', \quad (2)$$

ossia  $(OA - OJ)(OA' - OI') + OJ(OO' - OI') = 0$ ,

e siccome  $OI' = -OJ$ ,

così  $OA \cdot OA' - OI'(OA - OA' + OO') = 0. \quad (3)$

a) Ora si domandi se vi sono punti uniti; detto  $E$  un punto siffatto, l'equazione precedente avrà luogo ponendo  $E$  in luogo di  $A$  ed  $A'$ , onde

$$\overline{OE} = OI' \cdot OO'. \quad (4)$$

Di qui risulta che, se  $OI' \cdot OO'$  è positivo, cioè se  $O$  non si trova fra  $I$  ed  $O'$ , vi sono due punti uniti  $E, F$ , che hanno  $O$  per punto di mezzo e separano armonicamente i punti  $I, O'$  (N° 55, b).

Se  $O$  si trova fra  $I$  ed  $O'$ , non vi sono punti uniti.

Se  $O'$  coincide con  $O$ , vi è un solo punto unito, che è il punto  $O$ .

b) Imaginiamo le due punteggiate descritte ciascuna da un punto che corra sempre nello stesso senso <sup>(1)</sup>. Se l'una è percorsa nel senso  $ABC$ , l'altra sarà percorsa nel senso  $A'BC'$ , i quali due sensi o sono uguali o sono opposti.

Se sono opposti i sensi  $ABC$ ,  $A'BC'$ , saranno tali anche  $IJA$ ,  $I'JA'$ ; il segmento finito  $JA$  e il segmento infinito  $I'A'$  hanno sensi opposti, cioè i segmenti finiti  $JA$ ,  $I'A'$  hanno lo stesso senso. In virtù della (1), anche  $JO$ ,  $I'O'$  hanno allora lo stesso senso; dunque  $O$  non cade fra  $I'$  ed  $O'$  (fig. 58<sup>a</sup>, a), epperò vi sono due punti uniti. Siccome  $OE$  è media proporzionale fra  $OI$ ,  $OO'$ , così i punti uniti cadono fuori del segmento finito  $JI$ .

Se i sensi  $ABC$ ,  $A'BC'$  sono uguali, si arriva analogamente alla conseguenza che  $JA$  e  $I'A'$ , e così  $JO$  e  $I'O'$  hanno sensi opposti. Allora vi saranno punti uniti, se  $O$  non è fra  $I'$ ,  $O'$ , cioè se  $O'$  è fra  $O$  ed  $I'$  (fig. 58<sup>a</sup>, b). Siccome  $OE$  è media proporzionale fra  $OI$ ,  $OO'$ , così i punti uniti cadono entro il segmento  $JI$ .

c) Se vi sono due punti uniti  $E$ ,  $F$  (fig. 59<sup>a</sup>), conducasi per  $E$  una retta ad arbitrio, e da due punti  $S$ ,  $S'$  presi in essa si proiettino rispettivamente le due punteggiate. I due fasci sono prospettivi, a cagione del raggio unito  $SES'$ ; perciò i raggi corrispondenti  $SA$  ed  $S'A'$ ,  $SB$  ed  $S'B'$ , ...  $SF$  ed  $S'F$  si seglieranno in punti di una retta passante per  $F$ .

Sia  $E''$  il punto in cui questa retta sega  $SS'$ ; allora saranno  $EFAA'$ ,  $EFBB'$  le proiezioni di  $EE''SS'$  risp. dai centri  $A'$ ,  $B'$ ; dunque i gruppi  $EFAA'$ ,  $EFBB'$  sono proiettivi; vale a dire il rapporto anarmonico del gruppo formato dai due punti uniti e da due punti corrispondenti qualunque è costante. Dunque:

Due forme proiettive sovrapposte, dotate di due elementi uniti, sono costituite dalle coppie d'elementi che con due elementi fissi danno un rapporto anarmonico costante <sup>(2)</sup>.

d) Se non vi sono punti uniti, cioè se  $O$  si trova fra  $O'$  ed  $I'$  (fig. 60<sup>a</sup>), si innalzi in  $O$  una perpendicolare  $OU$  alla retta data, di tale lunghezza che sia  $OU$  media proporzionale fra  $I'O$  ed  $OO'$ ; cioè che l'angolo  $I'OU$  sia retto. Condotta inoltre per  $U$  la  $I'UJ'$  parallela alla retta data, avremo l'angolo  $IUI'$  uguale all'angolo  $JUJ'$ , e l'angolo  $OUO'$  uguale ad  $O'I'U$  epperò ad  $IUI'$ . Dunque ne' due fasci proiettivi, che da  $U$  proiettano le due punteggiate date, sono uguali gli angoli  $IUI'$ ,  $JUJ'$ ,  $OUO'$  di tre coppie di raggi corrispondenti; la stessa grandezza e lo stesso senso avranno pertanto (N° 81) gli angoli  $AUA'$ ,  $BUB'$ , ... <sup>(3)</sup>. Concludiamo:

Due punteggiate proiettive sovrapposte senza punti uniti si possono sempre considerare come generate dalle intersezioni

<sup>(1)</sup> Cfr. STEINER, l. c., p. 61.

<sup>(2)</sup> La costruzione che precede risolve il problema: date due coppie di punti corrispondenti  $AA'$ ,  $BB'$  e un punto unito  $E$ , trovare l'altro punto unito.

<sup>(3)</sup> CHARLES, l. c., p. 119.

della retta data coi lati di un angolo di grandezza costante, il quale ruoti intorno al suo vertice fisso.

**84.** Si è veduto (N° 66) come si risolva in generale il problema: date tre coppie di elementi corrispondenti di due forme (di 1ª specie) proiettive, costruire quante altre coppie si vogliano, ossia costruire l'elemento di una forma che corrisponda ad un elemento dato dell'altra. Lo studioso potrà ora trattare per esercizio i seguenti casi particolari:

1° Le forme siano due punteggiate  $u, u'$  non sovrapposte; e le coppie d'elementi dati siano

- |    |  |
|----|--|
| a) | $P$ e $P', Q$ e $Q' (^1), A$ ed $A'$ ; |
| b) | $P$ e $P', A$ ed $A', B$ e $B'$ ;      |
| c) | $I$ ed $I', J$ e $J', P$ e $P'$ ;      |
| d) | $I$ ed $I', J$ e $J', A$ ed $A'$ ;     |
| e) | $I$ ed $I', P$ e $P', Q$ e $Q'$ ;      |
| f) | $I$ ed $I', P$ e $P', A$ ed $A'$ ;     |
| g) | $I$ ed $I', A$ ed $A', B$ e $B'$ ;     |

2° Se le punteggiate sono sovrapposte, risolvere i problemi d) e g).

3° Se le forme sono due fasci (di raggi) non concentrici, risolvere i problemi correlativi ad a) e b).

4° Uno de' fasci abbia il centro all'infinito.

5° Entrambi i fasci abbiano i centri all'infinito.

**85.** Si dimostri il seguente teorema:

Se i tre vertici  $A, A', A''$  di un triangolo variabile scorrono su tre rette fisse  $u, u', u''$  concorrenti in un punto, e se due lati  $A'A'', A''A$  ruotano rispettivamente intorno a due punti fissi  $O, O'$ , anche il terzo lato  $AA'$  passerà per un punto fisso  $O''$ , situato nella retta  $OO'$ .

Basterà mostrare che i punti  $A, A', A''$  nel loro movimento descrivono tre punteggiate, che a due a due sono prospettive. Ovvero, si osserverà che a due posizioni del triangolo variabile si può applicare il teorema del N° 12.

Stabilito questo teorema, si deduce tosto il seguente corollario:

Se i vertici di un quadrangolo variabile  $AA'A''A'''$  scorrono su quattro rette fisse, concorrenti in un punto  $O$ , mentre tre lati  $AA', A'A'', A''A'''$  girano attorno a tre punti fissi  $C', B'', B'$ , anche il quarto lato  $A'''A$  e le diagonali  $AA'', A'A'''$  passeranno per altri tre punti fissi  $C'', C'', B''$ , determinati dai primi. I sei punti fissi sono i vertici di un quadrilatero completo, vale a dire, essi sono a tre a tre allineati su quattro rette (fig. 61ª).

E nello stesso modo si deduce il corollario analogo, relativo ad un poligono di  $n$  vertici.

(¹)  $P, P', Q, Q', I, I', J, J'$  hanno i significati espressi al N° 66.  $A, B, \dots$  sono punti dati ad arbitrio.

**86. TEOREMA.** — Se ad un triangolo  $U_1U_2U_3$  è circoscritto un altro triangolo  $O_1O_2O_3$ , esistono infiniti triangoli che sono inscritti nel primo e circoscritti al secondo (fig. 62<sup>a</sup>).

Infatti, se progetto la punteggiata  $U_2U_3 \dots$  da  $O_2$  e da  $O_3$ , avrò i fasci prospettivi

$$O_2 (U_1, U_2, U_3, \dots), O_3 (U_1, U_2, U_3, \dots);$$

e similmente, se da  $O_1$  e da  $O_3$  progetto la punteggiata  $U_1U_3 \dots$ , avrò i fasci prospettivi

$$O_1 (U_1, U_2, U_3, \dots), O_3 (U_1, U_2, U_3, \dots).$$

Dunque sono proiettivi i fasci

$$O_1 (U_1, U_2, U_3, \dots), O_2 (U_1, U_2, U_3, \dots);$$

ma i raggi  $O_1U_3, O_2U_3$  coincidono, vale a dire, questi due fasci sono prospettivi, e la loro comune sezione è  $U_1U_2$ . Abbiamo dunque i tre fasci  $O_1, O_2, O_3$  che presi a due a due sono prospettivi ed hanno per sezioni comuni

il primo ed il secondo la retta  $U_1U_2$ ,

il secondo ed il terzo la retta  $U_2U_3$ ,

il terzo ed il primo la retta  $U_3U_1$ .

Ciò significa che ogni terna di raggi corrispondenti formerà un triangolo circoscritto ad  $O_1O_2O_3$  ed inscritto in  $U_1U_2U_3$  (\*).

**87. TEOREMA.** — Una retta mobile intorno ad un punto fisso  $U$  sega due rette fisse  $u, u'$  ne' punti  $A, A'$ ; supposti inoltre dati due punti  $S, S'$  in linea retta col punto  $uu'$ , il punto  $M$  comune alle  $SA, S'A'$  descrive una retta (\*\*).

Si dimostra osservando che i punti  $A, A'$  generano due punteggiate prospettive; e che per conseguenza sono prospettivi anche i fasci generati dai raggi mobili  $SA, S'A'$  (N<sup>o</sup> 35 e 62).

Si enunci e si dimostri il teorema correlativo.

**88. TEOREMA.** —  $U, S, S'$  sono tre punti dati in linea retta; intorno ad  $U$  ruota una trasversale che incontra due rette fisse  $u, u'$  in due punti  $A, A'$ ; il punto  $M$  comune alle  $SA, S'A'$  genera una retta passante pel punto  $uu'$  (†).

Dimostrazione analoga a quella del teorema precedente.

Questo teorema si può enunciare anche così:

Se i tre lati di un triangolo variabile  $AA'M$  ruotano intorno a tre punti fissi  $U, S, S'$ , situati in linea retta, mentre due vertici  $A, A'$  si muovono su due rette date  $u, u'$ , anche il terzo vertice  $M$  descriverà una linea retta (‡).

(\*) STEINER, *l. c.*, p. 85.

(†) PAPPO, *l. c.*, lib. VII, 138, 139, 141, 143. — Cfr. CHASLES, *l. c.*, p. 242.

(‡) CHASLES, *l. c.*, N<sup>o</sup> 334.

(§) Porisma di EUCLIDE. Cfr. PAPPO, *l. c.*, prefazione al lib. VII.



In modo affatto simigliante si dimostra l'enunciato più generale:

Se un poligono di  $n$  lati si deforma in modo che tutt'i suoi lati passino per altrettanti punti fissi, situati in linea retta, mentre  $n-1$  vertici scorrano su rette fisse, anche l'ultimo vertice, e il punto di concorso di due lati non consecutivi qualsivogliano descriveranno linee rette (\*).

La proposizione correlativa è indicata al N° 85.

**89. PROBLEMA.** — Per un punto  $P$  dato nel piano di un parallelogrammo  $ABCD$  condurre, coll'uso della sola riga, la parallela ad una retta  $EF$  situata nello stesso piano.

Siano (fig. 63\*)  $E, F$  i punti in cui la retta data incontra i lati  $AB, AD$ ; preso ad arbitrio un punto  $K$  in  $AC$ , tirinsi le  $EK, FK$ , le quali seghino rispettivamente  $CD, BC$  in  $G, H$ . I triangoli  $AEF, CGH$  sono omologici (N° 16), perchè le congiungenti  $AC, EG, FH$  concorrono in  $K$ ; e l'asse d'omologia è la retta all'infinito, perchè i lati  $AE, AF$  del primo triangolo sono ordinatamente paralleli ai corrispondenti  $CG, CH$  del secondo. Dunque sono paralleli anche i lati rimanenti  $EF, GH$  (2).

Ora il problema è ridotto ad un altro che è già stato risoluto (N° 69, b), vale a dire: date due rette parallele  $EF, GH$ , condurre per un punto dato  $P$  la parallela alle date.

Ecco un'altra soluzione, dovuta a LAMBERT (3). Si prolunghino (fig. 64\*) i lati  $AB, BC, CD, DA$  e una diagonale  $AC$  del dato parallelogrammo sino ad incontrare  $EF$  ne' punti  $E, F, G, H, I$ ; tirisi ad arbitrio una retta per  $I$ , che seghi le  $EP, GP$  in  $A', C'$ ; se  $Q$  è il punto di concorso delle  $HA', FC'$ , sarà  $PQ$  la retta domandata.

Infatti: indicati con  $B', D'$  i punti ove  $EP, GP$  segano rispettivamente  $FQ, HQ$ , i quadrilateri  $ABCD, A'B'C'D'$  sono omologici, essendo  $EF$  l'asse d'omologia; il punto  $P$  corrisponde al concorso delle  $AB, CD$ ; e il punto  $Q$  al concorso delle  $BC, AD$ . Dunque  $PQ$  è la retta-limite della seconda figura, epperò  $PQ$  è parallela ad  $EF$  (N° 16).

a) **PROBLEMA.** — Dato un circolo e il suo centro, tirare coll'uso della sola riga una perpendicolare ad una retta data.

Conducansi (fig. 65\*) nel circolo due diametri  $AC, BD$ ; la figura  $ABCD$  sarà un rettangolo. Quindi, assunto ad arbitrio un punto  $K$  della circonferenza, si potrà, mediante la proposizione che precede, tirare  $KL$  parallela alla retta data  $EF$ . Allora, congiungendo il secondo punto  $L$ , comune alla  $KL$  ed alla circonferenza, col secondo termine  $M$  del diametro che passa per  $K$ , sarà evidentemente  $LM$  perpendicolare a  $KL$ , epperò anche alla retta data.

b) **PROBLEMA.** — Una retta  $AC$  è divisa per metà in  $B$ ; si vuol dividere  $BC$  in  $n$  parti uguali, usando della sola riga.

(\*) *Porisma di PAPPO, I. c., prefazione al lib. VII.*

(\*) *PONCELET, Propriétés projectives* (Paris 1822), N° 498.

(\*) *Freie Perspective* (Zürich 1774), t. 2°, p. 169.

Costruiscasi (fig. 66<sup>a</sup>) un quadrilatero  $ULDN$ , del quale due lati opposti  $DL$ ,  $NU$  concorrano in  $A$ , gli altri due  $LU$ ,  $DN$  in  $C$ , e una diagonale  $DU$  passi per  $B$ ; l'altra diagonale  $LN$  sarà parallela ad  $AC$  (N° 51) e bisecata da  $DU$  in  $M$  (N° 48). Costruiscasi ora un secondo quadrilatero  $VMEO$ , sotto le stesse condizioni del precedente, di più, che siano  $M$  un estremo ed  $N$  il punto di mezzo della diagonale parallela ad  $AC$ ; o in altre parole: conducansi le  $AM$ ,  $BN$  che si seghino in  $E$ , e la  $CE$  che seghi in  $O$  il prolungamento di  $LN$ , sicchè risulterà  $NO = MN = LM$ . Si costruisca ora un terzo quadrilatero analogo ai primi due, in modo però che siano  $N$  un estremo ed  $O$  il punto di mezzo della diagonale parallela ad  $AC$ . Se  $P$  è il secondo estremo di questa diagonale, avremo adunque  $OP = NO = MN = LM$ . Si continui nella stessa guisa sinchè il numero de' segmenti uguali  $LM$ ,  $MN$ ,  $NO$ ,  $OP$ , ... sia uguale ad  $n$ ; se  $PQ$  è l'ultimo segmento ottenuto, tirinsi le  $LB$ ,  $QC$  che concorrano in  $Z$ ; le rette che congiungono  $Z$  ai punti  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ , ... divideranno  $BC$  in  $n$  parti, come si voleva (1).

Così pure si risolvono coll'uso della sola riga i seguenti problemi:

Date due rette parallele  $AB$  ed  $a$ , dividere  $AB$  per metà (N° 51).

Data una retta  $AB$  divisa per metà in  $C$ , condurre per un punto dato la parallela ad  $AB$  (N° 51).

Dato un cerchio ed il suo centro, dividere per metà un angolo dato (N° 52).

Dati due angoli uguali ed adjacenti  $AOC$ ,  $COB$ , condurre per  $O$  la perpendicolare ad  $OC$  (N° 52).

**90. TEOREMA.** — Quando due triangoli  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , situati in piani differenti  $\sigma$ ,  $\sigma'$ , sono prospettivi, se si fa girare il piano dell'uno di essi intorno alla retta  $\sigma\sigma'$ , il punto  $O$ , dove concorrono i raggi  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , mutando di posizione, descrive un cerchio il cui piano è perpendicolare alla retta  $\sigma\sigma'$  (2).

Siano  $D$ ,  $E$ ,  $F$  (fig. 158<sup>a</sup>) i punti della retta  $\sigma\sigma'$  ne' quali concorrano le coppie di lati corrispondenti  $BC$  e  $B'C'$ ,  $CA$  e  $C'A'$ ,  $AB$  e  $A'B'$  (N° 12). Per  $O$ , centro di proiezione de' due triangoli  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , considerati in una posizione determinata de' loro piani, si conducano le rette  $SG$ ,  $SH$ ,  $SK$  ordinatamente parallele ai lati del triangolo  $A'B'C'$ ; queste rette, trovandosi in uno stesso piano  $\pi$ , parallelo a  $\sigma'$ , incontreranno il piano  $\sigma$  in tre punti  $G$ ,  $H$ ,  $K$  della retta  $\pi\sigma$ .

Immaginiamo ora che il piano  $\sigma'$  ruoti intorno alla retta  $\sigma\sigma'$ , trascinando con sè il triangolo  $A'B'C'$ . Il gruppo di quattro punti  $BCDG$  è prospettivo al gruppo  $B'CDG'$ , dove  $G'$  indica il punto all'infinito di  $B'C'$ ; perciò il rapporto anarmonico ( $BCDG$ ) è uguale a ( $B'CDG'$ ), ossia (N° 53, e) a  $B'D : C'D$ , quantità costante. Dunque, essendo  $B$ ,  $C$ ,  $D$  tre punti fissi, anche  $G$  sarà un punto determinato ed invariabile (N° 53, g).

(1) Questi ed altri problemi da risolversi colla sola riga si trovano nella citata opera di LAMBERT.

(2) CRASLES, I. c., N° 368, 369.

I triangoli simili  $OBG$ ,  $B'DD$  danno poi

$$OG : B'D = BG : BD,$$

donde

$$OG = \frac{B'D \cdot BG}{BD},$$

vale a dire  $OG$  è una quantità costante. Ciò significa che il punto  $O$  si muove sopra una sfera di centro  $G$ , il cui raggio è la costante anzidetta.

Nello stesso modo si dimostra che il punto  $O$  si muove sopra due altre sfere, i cui centri sono i punti  $H$ ,  $K$ .

La linea descritta dal punto  $O$ , dovendo trovarsi simultaneamente sopra più sfere, è adunque una circonferenza, il cui piano sarà perpendicolare alla retta contenente i centri delle sfere, ed il cui centro sarà situato in questa medesima retta <sup>(1)</sup>.

Questa retta  $GHK$ , comune ai piani  $\pi$ ,  $\sigma$ , epperò parallela alla  $\sigma\sigma'$  (giacchè i piani  $\pi$ ,  $\sigma'$  sono paralleli) è la retta di fuga o retta-limite della figura  $\sigma$ , considerata come immagine prospettiva della figura  $\sigma'$  (N° 11).

**91. TEOREMA.** — Due fasci proiettivi, aventi lo stesso centro  $O$ , posti in uno stesso piano  $\sigma$  e privi di raggi uniti, si possono considerare come immagine prospettiva di due fasci direttamente uguali <sup>(2)</sup>.

Taglinsi i due fasci con una trasversale  $s$ ; ne risulteranno due punteggiate proiettive  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$ , sovrapposte e prive di punti uniti. Conducasi per  $s$  un piano  $\sigma'$  ad arbitrio; in esso si può determinare un punto  $U$  (N° 83, d), dal quale i segmenti  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... si proiettino tutti sotto angolo costante; vale a dire, proiettando le due punteggiate da  $U$ , si otterranno due fasci direttamente uguali. Se ora si ponga l'occhio in un punto qualsivoglia della retta  $OU$  e da esso si proiettino sul piano  $\sigma'$  i fasci dati, si otterranno appunto i fasci uguali anzidetti.

## § 12. Involuzione.

**92.** Sia  $O$  il centro di due fasci proiettivi concentrici (fig. 67\*), i quali siano rispettivamente segati dalle trasversali  $u$ ,  $u'$ , sicchè ne risultino le punteggiate proiettive  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$ ; e sia poi  $u''$  la retta sulla quale si segano le coppie di rette  $AB'$  ed  $A'B$ , ... (N° 67, a sinistra). Un raggio (non unito) condotto ad arbitrio per  $O$  segherà  $u$ ,  $u'$  in due punti non corrispondenti  $A$ ,  $B'$ ; e incontrerà  $u''$  in un punto della retta  $A'B$ . Donde segue che al raggio  $OA$  del primo fascio corrisponde il raggio  $OA'$  dell'altro;

(\*) BALTZER, *Stereom.*, p. 31.

(2) CRABLES, *J. G.*, N° 480.

e al raggio  $OB$  di questo il raggio  $OB$  di quello; cioè ad uno stesso raggio  $OA$  od  $OB$ , secondo che si consideri come appartenente all'uno o all'altro fascio, corrispondono due raggi  $OA'$ ,  $OB$ , che sono distinti fra loro: infatti la retta  $A'B$ , dovendo incontrare  $AB'$  sulla  $u''$ , non può passare pel punto  $O$ , che si suppone non situato in  $u''$ .

Dunque, in generale, in due forme <sup>(1)</sup> proiettive (di 1<sup>a</sup> specie) sovrapposte, ad uno stesso elemento corrispondono due elementi distinti, secondo che quello si riguardi come elemento dell'una o dell'altra forma.

Diciamo, in generale, perchè la dimostrazione che precede suppone che  $O$  sia fuori di  $u''$ .

93. Ma se  $O$  è in  $u''$  (fig. 68\*), condotto per  $O$  un raggio arbitrario che seghi  $u$ ,  $u'$  in  $A$ ,  $B$ , anche la retta  $A'B$  passa per  $O$ ; cioè al raggio  $OA$  od  $OB'$  corrisponderà uno stesso raggio  $OA'$  od  $OB$ ; il che esprimeremo col dire che i due raggi si corrispondono in doppio modo, o anche che i due raggi sono coniugati.

Viceversa, si supponga che i due fasci proiettivi concentrici abbiano una coppia di raggi che si corrispondano fra loro in doppio modo. Segando i due fasci con due trasversali  $u$ ,  $u'$ , diciamo  $A$ ,  $B'$  i punti in cui queste incontrano il primo raggio; il secondo raggio sarà incontrato in  $B$ ,  $A'$ . La retta  $u''$ , luogo dei punti ove si segano le coppie di congiungenti  $MN'$ ,  $M'N$  ( $N^o$  67), relative alle punteggiate proiettive  $u$ ,  $u'$ , passerà per  $O$ , perchè in questo punto si incrociano le  $AB'$ ,  $A'B$ . Condncendo allora per  $O$  un raggio arbitrario che seghi le trasversali per esempio in  $C$ ,  $D'$ , la retta  $C'D$  passerà anch'essa per  $O$ ; cioè anche i raggi  $OC'D'$ ,  $ODC$  si corrispondono in doppio modo. Dunque:

Se due forme proiettive (di 1<sup>a</sup> specie) sovrapposte hanno una coppia di elementi che si corrispondono in doppio modo, anche in tutte le altre coppie d'elementi corrispondenti, questi si corrispondono in doppio modo.

(<sup>1</sup>) Diciamo due forme, perchè il discorso fatto qui per due fasci di raggi di centro  $O$  si può ripetere del tutto analogamente per due punteggiate sovrapposte, o per due fasci di piani aventi lo stesso asse, al che si arriva anche tagliando i due fasci di raggi con una trasversale, ovvero proiettandoli da un centro preso fuori del loro piano.

**94.** Questo caso particolare di due forme proiettive (di 1<sup>a</sup> specie) sovrapposte si denomina involuzione (1): involuzione di punti o di raggi o di piani, secondochè gli elementi sono i punti di una retta, o i raggi di un fascio, o i piani di un fascio.

Nell'involuzione, adunque, gli elementi sono coniugati a due a due; cioè ogni elemento ha il suo coniugato; si consideri il primo come appartenente all'una o all'altra forma, il corrispondente è in entrambi i casi il coniugato. Da ciò segue che la considerazione delle due forme riesce superflua, e che l'involuzione può essere concepita come una serie di coppie di elementi coniugati a due a due.

Se si dirà che  $AA' . BB' . CC' \dots$  è un'involuzione, s'intenderà di esprimere che  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ , ... sono elementi coniugati; del resto ogni elemento potrà essere scambiato col suo coniugato, così che saranno proiettive le forme

$$\begin{aligned} AA'BB'CC' \dots \\ A'AB'BC' \dots \end{aligned}$$

**95.** Siccome l'involuzione non è che un caso particolare di due forme proiettive sovrapposte, così qualunque sezione o proiezione di un'involuzione produrrà di nuovo un'involuzione (2). Da due elementi coniugati dell'involuzione data nascono due elementi coniugati della nuova.

**96.** Quando le due punteggiate proiettive sovrapposte sono in involuzione, come ad un punto qualunque, così anche al punto all'infinito ( $I$  o  $J$ ) corrisponde un punto unico ( $I'$  o  $J'$ ); ossia i punti  $I$  e  $J$  coincidono in un punto solo, che diremo  $O$ : punto che è il coniugato di quello che è all'infinito. L'equazione (1) del N° 83 diviene allora

$$OA \cdot OA' = \text{cost.}^*$$

Cioè un'involuzione di punti è costituita dalle coppie di punti  $A, A'$  pei quali ha luogo la proprietà che il prodotto delle loro distanze da un punto fisso  $O$  (della retta data) sia una costante (3). Il punto fisso  $O$  dicesi centro o punto centrale dell'involuzione.

(1) DESARGUES, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (Paris 1639): edizione POUDEA (Paris 1864), t. 1, p. 449.

(2) DESARGUES, *l. c.*, p. 447. (3) DESARGUES, *l. c.*, p. 442, 449.

a) Gli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte, se queste formano un'involuzione, diconsi elementi doppi dell'involuzione. Per l'involuzione  $AA' . BB' \dots$  avendosi  $OA . OA' = OB . OB = \dots =$  ad una costante, se questa costante è positiva, cioè se  $O$  non cade fra due punti coniugati, vi saranno due punti doppi  $E, F$ , tali che

$$\overline{OE} = \overline{OF} = OA . OA' = OB . OB' = \dots$$

cioè  $O$  è il punto di mezzo del segmento  $EF$ ; e i gruppi  $EFAA'$ ,  $EFBB'$ , ... sono tutti armonici. Dunque:

Se un'involuzione ha due elementi doppi, questi separano armonicamente due elementi coniugati qualsivogliano, ossia l'involuzione è costituita dalle coppie di elementi che formano con due elementi fissi un gruppo armonico.

b) Se la costante è negativa, cioè se  $O$  cade fra due punti coniugati, non vi sono punti doppi. In questo caso vi sono due punti coniugati  $EE'$  equidistanti da  $O$ , pei quali cioè si ha  $OE = -OE'$  ed  $\overline{OE} = \overline{OE'} = -OE . OE' = -OA . OA'$ .

c) Se la costante è zero, il solo punto  $O$  è doppio; ma allora non vi è involuzione propriamente detta, perchè, dovendo essere nullo il prodotto  $OA . OA'$ , ogni coppia di punti coniugati ha un punto coincidente con  $O$ .

**97.** Che nell'involuzione dotata di due elementi doppi, questi siano separati armonicamente mediante due elementi coniugati qualunque, si può dimostrare anche così. Se  $E, F$  sono i due elementi doppi, ed  $A, A'$  due elementi coniugati, il gruppo  $EFAA'$  sarà proiettivo al gruppo  $EF'A'A$ , epperò (N° 65) questo o quel gruppo è armonico.

Ovvero anche così. Consideriamo  $EAA' \dots$ ,  $EA'A \dots$  come due punteggiate proiettive, e proiettiamole rispettivamente da due punti  $S, S'$  in linea retta con  $E$  (fig. 69°). I fasci proiettanti  $S(EAA' \dots)$ ,  $S'(EA'A \dots)$  sono prospettivi a cagione del raggio unito  $SSE$ ; dunque la retta che unisce il punto comune alle  $SA, SA'$ , col punto comune alle  $SA', S'A$  conterrà le intersezioni di tutte le coppie di raggi corrispondenti, epperò incontrerà la retta data nel secondo punto doppio  $F$ . Ma allora la figura ci dà un quadrilatero

completo, nel quale  $AA'$  è una diagonale segata dalle altre due diagonali in  $E, F$ ; dunque  $EF AA'$  è una forma armonica (N° 48).

Il teorema attuale è un caso particolare di quello del N° 83, c). Donde caviamo che le coppie d'elementi (punti d'una retta, raggi o piani d'un fascio) formanti con due elementi fissi un rapporto anarmonico costante costituiscono due forme proiettive sovrapposte, le quali sono in involuzione, nel caso che il rapporto anarmonico abbia il valore  $-1$  (N° 54).

**98.** L'involuzione è determinata da due coppie di elementi coniugati. Infatti, se sono date le coppie  $AA', BB'$ , assunto un elemento arbitrario  $C$ , si costruirà il suo coniugato  $C'$  facendo sì (N° 66) che riescano proiettivi i gruppi  $AA'BC, AA'B'C'$ . Allora si suol dire che i sei elementi  $AA' . BB' . CC'$  sono in involuzione (cioè essi formano tre coppie di un'involuzione).

Se l'involuzione è di punti, fuori della retta nella quale sono date le due coppie  $AA', BB'$  (fig. 70\*, 71\*) assumasi un punto arbitrario  $G$ , e descrivansi i cerchi  $GAA', GBB'$ , che si segheranno in un secondo punto  $H$ ; e sia  $O$  il punto ove la retta data è incontrata dalla  $GH$ . Allora, per una nota proprietà del cerchio, sarà  $OG . OH = OA . OA'$ , ed  $OG . OH = OB . OB'$ , epperò

$$OA . OA' = OB . OB',$$

dunque  $O$  è il punto centrale dell'involuzione determinata dalle coppie  $AA, BB'$ . Descrivasi ora un circolo qualunque per  $GH$ , il quale incontri la retta data in  $CC'$ ; avremo  $OG . OH = OC . OC'$ , epperò  $OC . OC' = OA . OA' = OB . OB'$ , cioè  $CC'$  sarà una coppia di punti coniugati dell'involuzione. E in altre parole: il circolo descritto per due punti coniugati  $CC'$  o  $DD', \dots$  e per uno de' punti  $G, H$ , passa sempre anche per l'altro di questi.

Dunque, le coppie di punti coniugati dell'involuzione non saranno altro che le intersezioni della retta data coi cerchi passanti pei punti  $GH$ .

a) Di qui si vede che, se l'involuzione ha punti doppi, questi saranno i punti di contatto della retta data con due cerchi passanti per  $GH$ . Abbiamo già veduto che essi punti separano armonicamente sì  $AA'$  che  $BB'$  (N° 96, a), dunque (N° 55, d) l'involuzione avrà punti doppi se l'una delle due coppie  $AA', BB'$  è tutta

interna o tutta esterna all'altra (fig. 70<sup>a</sup>), non li avrà se l'una coppia è separata mediante l'altra (fig. 71<sup>a</sup>).

Nel primo caso l'involuzione è (come già si è osservato) costituita dalle infinite coppie di punti che separano armonicamente una coppia di punti fissi.

b) Nel secondo caso invece l'involuzione è segnata sulla retta data dai lati di un angolo retto mobile intorno al suo vertice. Infatti, siccome i punti  $AA'$  sono separati mediante  $BB'$ , se si descrivono (fig. 72<sup>a</sup>) i cerchi sui diametri  $AA'$ ,  $BB'$ , essi si segheranno in due punti  $G$ ,  $H$  situati simmetricamente rispetto alla retta data: cioè la retta  $GH$  è perpendicolare alla retta data e da essa divisa per metà in  $O$ , punto centrale dell'involuzione. Da ciò segue che

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OB'},$$

e che tutti gli altri cerchi passanti per  $GH$ , i quali segnano sulla retta data le altre coppie  $CC'$ ,  $DD'$ , ... dell'involuzione, avranno pur essi i loro centri sulla retta  $AB$ ..., cioè avranno per diametri i segmenti  $CC'$ ,  $DD'$ , .... Dunque se i segmenti  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... si proiettano dal punto  $G$  (o dal punto  $H$ ), si avranno altrettanti angoli retti  $AGA'$ ,  $BGB'$ ,  $CGC'$ , ... (oppure  $AHA'$ ,  $BHB'$ ,  $CHC'$ , ...).

Concludiamo: Se un'involuzione di punti  $AA'$ ,  $BB'$ , ... in linea retta non ha punti doppi, cioè se il rettangolo  $OA \cdot OA'$  è una costante negativa  $-k^2$ , i segmenti  $AA'$ ,  $BB'$ , ... sono tutti veduti sotto angoli retti da ogni punto del circolo di centro  $O$ , il cui raggio è  $k$ , e il cui piano è perpendicolare alla retta data.

Questo teorema è un caso particolare di quello del N° 83, d). Dunque, se un angolo di grandezza costante ruota nel suo piano intorno al suo vertice, i suoi lati determinano sopra una trasversale fissa due punteggiate proiettive, le quali sono in involuzione nel caso che l'angolo sia retto.

99. Consideriamo un'involuzione di raggi, i quali siano paralleli, cioè abbiano un punto comune a distanza infinita. La retta all'infinito è un raggio dell'involuzione; il raggio ad essa conjugato contiene il punto centrale (N° 96) dell'involuzione di punti che si ottiene facendo una sezione con una trasversale arbitraria. Perciò il raggio suddetto si può denominare raggio centrale dell'involuzione proposta. Viceversa, se si proietta un'involuzione di punti per mezzo di raggi paralleli, questi costituiranno una nuova involuzione, il cui raggio centrale passerà pel punto centrale dell'involuzione data.



Allorchè da un'involuzione se ne cava un'altra mediante proiezioni o sezioni (N° 95), dagli elementi doppi della prima nascono gli elementi doppi della seconda.

**100.** Siccome nell'involuzione un gruppo qualunque di elementi è proiettivo al gruppo degli elementi coniugati, così quattro punti scelti ad arbitrio in un'involuzione di punti avranno un rapporto anarmonico uguale a quello dei loro coniugati. Per esempio, data l'involuzione  $AA' . BB' . CC' \dots$ , saranno proiettivi i gruppi  $ABA'C$ ,  $A'BAC$ , epperò

$$\frac{AA' : AC'}{BA' : BC'} = \frac{A'A : A'C}{B'A : B'C},$$

ossia

$$AB' . BC' . CA' + A'B . B'C . C'A = 0.$$

Viceversa, se sussiste questa relazione fra i segmenti determinati dai punti  $AA'BB'CC'$  di una retta, questi saranno accoppiati in involuzione. Infatti, la relazione anzidetta equivale all'uguaglianza de' rapporti anarmonici ( $ABA'C$ ), ( $A'BAC$ ); questi gruppi sono dunque proiettivi. Ma in essi,  $A$  ed  $A'$  si corrispondono in doppio modo; dunque (N° 93) ecc.

**101.** Abbiassi un quadrangolo completo  $QRST$  (fig. 73<sup>a</sup>) i cui lati opposti  $RT$  e  $QS$ ,  $ST$  e  $QR$ ,  $QT$  ed  $RS$  siano segati da una trasversale arbitraria in  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ ; e sia  $P$  l'intersezione di  $QS$  ed  $RT$ . Allora  $ATPR$  è la proiezione di  $ACA'B'$  dal centro  $Q$ , ed è anche la proiezione di  $ABA'C$  dal centro  $S$ ; dunque il gruppo  $ACA'B'$  è proiettivo ad  $ABA'C$ , ossia (N° 56)  $A'CAB$ . I punti  $A$  ed  $A'$  si corrispondono in doppio modo ne' gruppi proiettivi  $ACA'B'$ ,  $A'CAB$ ; dunque (N° 93)  $AA' . BB' . CC'$  sono tre coppie di punti coniugati d'un'involuzione. Ossia:

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti coniugati in involuzione (1).

Abbiassi un quadrilatero completo  $qrst$  (fig. 74<sup>a</sup>), i cui vertici opposti  $rt$  e  $qs$ ,  $st$  e  $qr$ ,  $qt$  ed  $rs$  siano proiettati da un centro arbitrario, per mezzo dei raggi  $a$  ed  $a'$ ,  $b$  e  $b'$ ,  $c$  e  $c'$ ; e sia  $p$  la congiungente di  $qs$  ed  $rt$ . Allora i fasci  $atpr$ ,  $aca'b'$  sono proiettivi, perchè prospettivi (sezione comune  $q$ ); e così pure sono prospettivi (sezione comune  $s$ ) epperò proiettivi i fasci  $atpr$ ,  $aba'c'$ . Dunque il fascio  $aca'b'$  è proiettivo al fascio  $aba'c'$ , vale a dire (N° 56) al fascio  $a'cab$ . I raggi  $a$ ,  $a'$  si corrispondono in doppio modo ne' gruppi proiettivi  $aca'b'$ ,  $a'cab$ ; dunque  $aa' . bb' . cc'$  sono tre coppie di raggi coniugati in involuzione. Ossia:

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un centro arbitrario per mezzo di tre coppie di raggi coniugati in involuzione.

(1) DESARGUES, l. c., p. 471.

O in altre parole:

Se un quadrangolo completo si deforma in modo che cinque de' suoi lati passino per altrettanti punti fissi, dati in linea retta, il sesto lato ruoterà anch'esso intorno ad un punto fisso della medesima retta, il quale con quei cinque costituisce un'involuzione di sei punti.

O in altre parole:

Se un quadrilatero completo si deforma in modo che cinque de' suoi vertici scorrano su cinque rette fisse, concorrenti in un punto, anche il sesto vertice si manterrà sopra un raggio uscente dallo stesso punto, ed i sei raggi saranno accoppiati in involuzione.

a) Il teorema che precede (a sinistra), combinato con quello del N° 100, dà (1):

Se una trasversale incontra in  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$  le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, fra i segmenti della trasversale avrà luogo la relazione

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

b) Nel teorema, a destra, denotiamo con  $U$  ed  $U'$ ,  $V$  e  $V'$ ,  $W$  e  $W'$  i vertici opposti  $rt$  e  $qs$ ,  $st$  e  $qr$ ,  $qt$  e  $rs$  del quadrilatero  $qrst$ , e con  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  i punti in cui i raggi  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  sono segati da una trasversale arbitraria. In virtù del N° 95, potremo allora enunciare la proposizione che segue:

I sei punti  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  che si ottengono proiettando da un centro arbitrario e sopra una retta arbitraria le tre coppie  $UU'$ ,  $VV'$ ,  $WW'$  di vertici opposti di un quadrilatero completo sono accoppiati in involuzione.

c) Suppongasi ora che il centro di proiezione  $G$  sia uno de' due punti comuni ai due cerchi aventi per diametri le diagonali  $UU'$ ,  $VV'$ ; gli angoli  $AGA'$ ,  $BGB'$  risultano retti, epperò (N° 98, b) sarà retto anche l'angolo  $CGC'$ ; vale a dire, il cerchio descritto sul diametro  $WW'$  passerà per  $G$ . Dunque:

I tre cerchi aventi risp. per diametri le tre diagonali di un quadrilatero completo passano per gli stessi due punti.

d) I tre cerchi hanno i loro centri in linea retta; dunque:

I punti di mezzo delle tre diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta (2).

**102.** Dal teorema (a sinistra) del N° 101 si cava la costruzione del sesto punto  $C'$ , quando sono dati gli altri cinque. Condotta ad arbitrio una retta per  $C$  e presi in essa due punti

Dal teorema (a destra) del N° 101 si cava la costruzione del sesto raggio  $c'$ , quando sono dati gli altri cinque. Preso ad arbitrio un punto in  $c$  e condotte da esso due rette  $q$ ,  $t$ , con-

(1) PAPPO, *l. c.*, lib. VII, 430.

(2) CHARLES, *l. c.*, N° 344 e 345.

<p><math>Q, T</math>, tirinsi le <math>AT, BT, A'Q, B'Q</math>: la retta che congiunge il punto <math>R</math> comune alle <math>AT, B'Q</math> col punto <math>S</math> comune alle <math>A'Q, BT</math> incontrerà la retta data nel punto cercato <math>C'</math>.</p>	<p>giungansi il punto <math>ta</math> col punto <math>qb'</math>, ed il punto <math>tb</math> col punto <math>qa'</math>; le congiungenti <math>r, s</math> concorrono in un punto che unito al centro del fascio dato darà il raggio cercato <math>c'</math>.</p>
---	--

a) Nel problema a sinistra, se il punto  $C$  è all'infinito, il suo conjugato sarà il punto centrale dell'involuzione. Per trovare adunque il punto centrale  $O$  dell'involuzione, della quale siano date due coppie  $AA', BB'$  di punti conjugati, si costruirà (fig. 75<sup>a</sup>) il quadrangolo completo in modo che due lati opposti passino per  $A, A'$ , altri due lati opposti per  $B, B'$ , e il quinto lato sia parallelo alla retta data; il sesto lato passerà per  $O$ .

b) Il sesto punto  $C'$  che con altri cinque  $AA'BB'C$  costituisce un'involuzione di sei punti è da questi determinato in modo unico: cioè vi è un solo punto  $C'$  che possessa tale proprietà (cfr. N° 98). Infatti, esso punto può riguardarsi come determinato dall'uguaglianza di rapporti anarmonici  $(AA'BC) = (A'ABC')$ , dunque (N° 53, g) ecc. .

**103.** Il teorema del N° 101, a sinistra, si può invertire dicendo:

Se una trasversale sega i lati di un triangolo  $RSQ$  (fig. 73<sup>a</sup>) in tre punti  $A', B', C'$ , i quali siano risp. accoppiati in involuzione con tre altri punti  $A, B, C$  della medesima trasversale, le rette  $RA, SB, QC$  concorreranno in uno stesso punto  $T$ .

Infatti, sia  $T$  il punto comune alle  $RA, SB$ , e  $C_1$  il punto in cui la trasversale incontra  $TQ$ . In virtù del teorema anzidetto, applicato al quadrangolo  $QRST$ , avremo  $(AA'BC_1) = (A'ABC')$ ; ma è per ipotesi  $(AA'BC) = (A'ABC')$ , dunque (N° 53, g)  $C_1$  coincide con  $C$ , ossia  $QC$  passa per  $T$ .

Ecco il teorema correlativo:

Se da un punto  $S$  si proiettano i vertici di un triangolo  $rsq$  (fig. 74<sup>a</sup>) mediante tre raggi  $a', b', c'$ , i quali siano risp. accoppiati in involuzione con tre altri raggi  $a, b, c$ , uscenti da  $S$ , i punti  $ra, sb, qc$  saranno in una stessa retta  $t$ .

**104.** Siano  $R', S', Q'$  i punti ne' quali le  $SQ, QR, RS$  sono risp. incontrate dalle  $RT, ST, QT$  (veggasi la fig. 73<sup>a</sup>, dove però i punti  $R', S', Q'$  non sono segnati). Ne' lati del triangolo  $RSQ$  avremo allora i gruppi di quattro punti

$$SQR'A', QRS'B', RSQ'C'$$

le cui proiezioni da  $T$  sulla trasversale sono

$$BCAA', CABB', ABCC'.$$

Se formiamo il prodotto de' rapporti anarmonici di questi ultimi gruppi risulta

$$\left(\frac{BA}{CA} : \frac{BA'}{CA'}\right) \left(\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'}\right) \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AC'}{BC'}\right),$$

ossia

$$-\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{CA' \cdot AB' \cdot BC'},$$

quantità che è uguale a  $-1$ , in virtù del N° 100. Dunque:

Se i lati di un triangolo sono segati da una trasversale arbitraria, e se i vertici si proiettano da un punto arbitrario sui lati risp. opposti, il prodotto de' rapporti anarmonici de' gruppi di quattro punti che si ottengono sui tre lati è l'unità negativa.

Viceversa, nei lati di un triangolo  $RSQ$  sian prese tre coppie di punti  $R'A', S'B', Q'C'$  in modo che il prodotto de' rapporti anarmonici  $(SQR'A')$ ,  $(QRS'B')$ ,  $(RSQ'C')$  sia  $-1$ ; se le rette  $RR', SS', QQ'$  concorrono in un punto, i punti  $A'B'C'$  saranno in linea retta; e reciprocamente, se  $A'B'C'$  sono tre punti in linea retta, le  $RR', SS', QQ'$  hanno un punto comune.

a) Suppongasi la trasversale portata a distanza infinita; i rapporti anarmonici  $(SQR'A')$ ,  $(QRS'B')$ ,  $(RSQ'C')$  divengono rispettivamente uguali (N° 53, e) ad  $SR' : QR', QS' : RS', RQ' : SQ'$ ; dunque (1):

Se tre rette uscenti da uno stesso punto  $T$  e passanti risp. pei vertici di un triangolo  $RSQ$  incontrano i lati opposti in  $R', S', Q'$ , fra i segmenti dei lati si ha la relazione:

$$\frac{SR'}{QR'} \cdot \frac{QS'}{RS'} \cdot \frac{RQ'}{SQ'} = -1;$$

e viceversa, se nei lati di un triangolo  $RSQ$  si prendono i punti  $R', S', Q'$  in modo che sussista la predetta rela-

(1) Teorema di CEVA: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Mediolani 1678), I, 2. -- Cfr. BALZER, *Trigon.*, p. 131.

zione, le congiungenti  $RR'$ ,  $SS'$ ,  $QQ'$  concorreranno in un punto  $T$ .

b) Ritenuta la trasversale essere del tutto arbitraria, assumansi le  $ST$ ,  $QT$  risp. parallele alle  $QR$ ,  $RS$ ; allora i punti  $S'$ ,  $Q'$  vanno all'infinito, ed  $R'$  risulta il punto di mezzo di  $SQ$  (come punto comune alle diagonali  $QS$ ,  $RT$  del parallelogrammo  $QRST$ ). Perciò i rapporti anarmonici  $(SQR'A')$ ,  $(QRSB')$ ,  $(RSQ'C')$  saranno risp. uguali a  $-(QA':SA')$ ,  $RB':QB'$ ,  $SC':RC'$ ; dunque <sup>(1)</sup>:

Se una trasversale sega i lati di un triangolo  $RSQ$  in  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , fra i segmenti dei lati sussiste la relazione:

$$\frac{QA'}{SA'} \cdot \frac{RB'}{QB'} \cdot \frac{SC'}{RC'} = 1,$$

e viceversa, se nei lati di un triangolo  $RSQ$  si prendono tre punti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  in modo che sussista la predetta relazione, questi tre punti saranno in linea retta.

**105.** Noi abbiamo veduto che, date due punteggiate projective  $(ABC\dots)$ ,  $(A'BC'\dots)$  situate in uno stesso piano, se dal punto comune a due rette analoghe alle  $AB'$  e  $A'B$ ,  $AC'$  e  $A'C$ , ...,  $BC'$  e  $B'C$ , ..., si proiettano entrambe le punteggiate date, i raggi proiettanti formano un'involuzione. I teoremi correlativi sono i seguenti:

Dati due fasci projectivi di raggi  $(abc\dots)$ ,  $(a'b'c'\dots)$ , posti in uno stesso piano ma non concentrici, se si segano colla retta congiungente due punti analoghi ad  $ab'$  e  $a'b$ ,  $ac'$  e  $a'c$ , ...,  $bc'$  e  $b'c$  ..., si ottengono coppie di punti in involuzione.

Dati due fasci projectivi di piani  $(\alpha\beta\gamma\dots)$ ,  $(\alpha'\beta'\gamma'\dots)$ , i cui assi siano concorrenti, se si fa una sezione col piano trasversale determinato da due rette analoghe alle  $\alpha\beta'$  e  $\alpha'\beta$ ,  $\alpha\gamma'$  e  $\alpha'\gamma$ , ...,  $\beta\gamma'$  e  $\beta'\gamma$ , ..., si ottengono coppie di raggi in involuzione.

Dati due fasci projectivi di raggi  $(abc\dots)$ ,  $(a'b'c'\dots)$ , aventi lo stesso centro ma non situati in uno stesso piano, se si proiettano da un punto comune a due piani come  $ab'$  e  $a'b$ ,  $ac'$  e  $a'c$ , ...,  $bc'$  e  $b'c$ , ..., i piani proiettanti costituiscono un'involuzione.

**106. CASI PARTICOLARI.** — a) Quante si vogliano coppie di punti di una retta, equidistanti da un punto fisso della medesima, costituiscono una involuzione, perchè ogni coppia è separata armonicamente mediante il punto fisso e il punto all'infinito.

Viceversa, se il punto all'infinito è uno degli elementi doppi di un'invo-

<sup>(1)</sup> Teorema di MENELAÛ: *Sphaerica* III, 4. — Cfr. BALTZER, *Trigon.*, p. 134.

luzione di punti, ogni coppia di elementi coniugati ha il suo punto di mezzo nell'altro punto doppio. Se in un'involuzione, due coppie  $AA'$ ,  $BB'$  di punti coniugati hanno lo stesso punto di mezzo, questo sarà anche il punto di mezzo di qualunque altra coppia  $CC'$ .

b) Quanti si vogliano angoli rettilinei aventi lo stesso vertice e situati in uno stesso piano, ed inoltre divisi tutti per metà da una stessa retta fissa, costituiscono un'involuzione, perchè i lati di ciascun angolo sono divisi armonicamente dalla bisettrice comune e dal raggio a questa perpendicolare.

Viceversa, se gli elementi doppi di un'involuzione di raggi sono due rette perpendicolari fra loro, due raggi coniugati di ciascuna coppia fanno angoli uguali con ciascuno de' raggi doppi. Se in un'involuzione, gli angoli di due coppie  $aa'$ ,  $bb'$  di raggi coniugati hanno le bisettrici comuni, queste saranno anche le bisettrici degli angoli di qualunque altra coppia  $cc'$ .

c) Quanti si vogliano angoli diedri, aventi lo stesso spigolo e tutti divisi per mezzo da un piano fisso, costituiscono un'involuzione, perchè le facce di ciascun diedro sono separate armonicamente mediante un piano fisso ed il piano perpendicolare a questo e passante per lo spigolo comune.

Viceversa, se gli elementi doppi di un'involuzione di piani sono piani fra loro perpendicolari, i piani coniugati di ciascuna coppia fanno angoli uguali con ciascuno de' piani doppi, ecc.

### § 13. Forme proiettive nel cerchio.

**107.** Siano dati in un piano due fasci (direttamente) uguali di raggi  $abcd \dots$ ,  $a'b'c'd' \dots$ , i cui centri siano i punti  $O$ ,  $O'$  (fig. 76<sup>a</sup>); siccome l'angolo di due raggi corrispondenti  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ... è costante (N° 80), così il luogo geometrico del punto comune a due raggi corrispondenti sarà un cerchio (1) passante per i punti  $O$ ,  $O'$ . La tangente al cerchio in  $O$  fa colla corda  $OO'$  un angolo che è uguale a ciascuno degli angoli  $OA'O$ ,  $OBO'$ ,  $OCO'$ , ...; ma lo stesso angolo dee fare col raggio  $O'O$  del secondo fascio il corrispondente raggio del primo; dunque la tangente in  $O$  è appunto quel raggio  $q$  del primo fascio il cui corrispondente  $q'$  del secondo è la  $O'O$ .

Se concepiamo la circonferenza come percorsa dal punto mobile  $A$ , i raggi mobili  $AO$ ,  $AO'$ , ossia  $a$ ,  $a'$ , genereranno i due fasci; quando  $A$  sia vicinissimo ad  $O$ , il raggio  $AO'$  differirà assai poco in posizione da  $OO'$  ossia da  $q'$ , e il raggio  $AO$  differirà assai poco da  $q$ , cioè dalla tangente in  $O$ . Ciò concorda colla definizione della

(1) BALTZER, *Planim.*, p. 45.

tangente in  $O$ : la retta che congiunge  $O$  al punto infinitamente prossimo della circonferenza.

Similmente, al raggio  $OO'$  ossia  $p$  del primo fascio corrisponderà nel secondo il raggio  $p'$  che tocca il cerchio in  $O'$ .

**108.** Viceversa, se quantisivogliamo punti  $A, B, C, D, \dots$  di un cerchio siano proiettati da due punti  $O, O'$  del cerchio medesimo, i raggi proiettanti  $O(A.B.C.D\dots)$ ,  $O'(A.B.C.D\dots)$  costituiscono due fasci che sono (direttamente) uguali, a cagione degli angoli uguali  $AOB = AO'B$ ,  $AOC = AO'C, \dots$ ,  $BOC = BO'C, \dots$ , epperò proiettivi (N° 78). In altre parole: se restano fissi i punti  $A, B, C, \dots$ , mentre il centro del fascio si muove sulla circonferenza, il fascio si conserva sempre uguale epperò proiettivo a sè medesimo.

Il raggio che proietta da  $O$  lo stesso punto  $O$ , o più precisamente il punto del circolo infinitamente vicino ad  $O$ , è la tangente in  $O$ . Da ciò segue che ne' fasci proiettivi  $O(A.B.C\dots)$ ,  $O'(A.B.C\dots)$  il raggio del primo fascio che corrisponde al raggio  $OO'$  del secondo è la tangente in  $O$ .

**109.** Siccome in due forme proiettive a quattro elementi armonici corrispondono sempre quattro elementi armonici (N° 58), così se i quattro raggi  $O(A.B.C.D)$  sono armonici, sarà pure armonico il gruppo  $O'(A.B.C.D)$ , comunque sia situato il punto  $O'$  sul circolo. Facendo coincidere  $O'$  col punto infinitamente prossimo ad  $A$ , ne segue essere armonico il gruppo costituito dalla tangente in  $A$  e dalle corde  $AB, AC, AD$ . Similmente, sarà armonico il fascio composto della corda  $AB$ , della tangente in  $B$  e delle corde  $BC, BD$ ; ecc.

In questo caso, si dirà che i quattro punti  $ABCD$  del cerchio sono armonici (1).

**110.** Se  $PQ, P'Q'$  sono due tangenti fisse d'un cerchio di centro  $M$  (fig. 77\*), ed  $AA'$  una tangente variabile limitata fra le due tangenti fisse, l'angolo  $AMA'$  è costante. Infatti, detti  $Q, P, T$  i punti di contatto, si ha

$$\begin{aligned} \text{angolo } AMA' &= AMT + TMA' \\ &= \frac{1}{2} QMT + \frac{1}{2} TMP' = \frac{1}{2} QMP' \quad (2). \end{aligned}$$

(1) STEINER, *l. c.*, p. 137.

(2) BALTZER, *Planim.*, pag. 6 e 13.

Variando la retta  $AA'$  fra le due tangenti fisse, i raggi  $MA, MA'$  generano adunque due fasci proiettivi (N° 82), epperò i punti  $A, A'$  descrivono due punteggiate proiettive. Dunque:

Le tangenti del cerchio segano due tangenti fisse in punti costituenti due punteggiate proiettive (1).

Siccome l'angolo  $AMA'$  è uguale a  $\frac{1}{2} QMP$ , cioè a ciascuno degli angoli  $QMQ', PMP'$  (dove  $P, Q'$  indicano uno stesso punto, secondo che si riguarda situato nella prima o nella seconda tangente fissa), così i punti  $Q$  e  $Q', P$  e  $P'$  sono corrispondenti nello due punteggiate proiettive; vale a dire, i punti di contatto delle due tangenti fisse sono i corrispondenti del punto comune alle medesime.

Se concepiamo il cerchio come percorso (inviluppato) dalla tangente mobile, i punti  $A, A'$  generano le due punteggiate proiettive: quando la tangente mobile abbia una posizione prossima a quella di  $PQ$ , il punto  $A'$  sarà prossimo a  $Q'$ , ed il punto  $A$  sarà prossimo al punto corrispondente di  $Q'$ , cioè al punto di contatto della  $PQ$ . Dunque:

Il punto di contatto d'una tangente è da considerarsi come intersezione di questa colla tangente infinitamente vicina.

**111.** Il teorema che precede torna a dire che quattro tangenti  $abcd$  di un cerchio sono segate da una quinta tangente in quattro punti  $ABCD$ , il cui rapporto anarmonico è costante, qualunque sia questa quinta tangente.

La quinta tangente può anche essere infinitamente prossima ad una delle prime quattro, per esempio ad  $a$ ; allora  $A$  è il punto di contatto di  $a$ , e  $B, C, D$  sono le intersezioni  $ab, ac, ad$ .

Come caso particolare, se  $abcd$  segano  $PQ$  in quattro punti armonici, anche le intersezioni di  $abcd$  con qualsivoglia altra tangente del cerchio formeranno un gruppo armonico. Sarà dunque armonico il gruppo costituito dal punto di contatto di  $a$  e dai punti d'intersezione  $ab, ac, ad$ , ecc. In tal caso le quattro tangenti  $abcd$  diconsi armoniche (2).

**112.** Siano (fig. 78°)  $A, B, C, \dots X$  punti del cerchio; ed  $a, b, c, \dots x$  le tangenti relative. Se i punti  $A', B', C', \dots$ , ove  $x$  è segata dalle  $a, b, c, \dots$  si proiettano dal centro del cerchio, i raggi

(1) BALTZER, *Trigon.*, pag. 155.

(2) STEINER, *l. c.*, p. 157.



proiettanti sono rispettivamente perpendicolari alle corde  $XA$ ,  $XB$ ,  $XC$ , ..., epperò formano ( $N^{\circ}$  82) un fascio uguale al fascio  $X(A, B, C, \dots)$ . Dunque la punteggiata  $A'B'C \dots$  è proiettiva al fascio  $X(ABC \dots)$ , (<sup>1</sup>) ossia

La punteggiata che più tangenti date del cerchio determinano sopra una tangente arbitraria è proiettiva al fascio de' raggi che proiettano i loro punti di contatto da un punto arbitrario del cerchio medesimo.

Di qui segue come caso particolare che, se  $X(ABCD)$  è un gruppo armonico, tale è anche  $A'B'C'D'$ , cioè:

Se quattro punti di un cerchio sono armonici, sono armoniche le relative tangenti, e viceversa.

## § 14. Forme proiettive nelle coniche.

**113.** Simagini di costruire una figura omologica ( $N^{\circ}$  18) a ciascuna di quelle che esprimono i teoremi dei  $N^{\circ}$  108, 110, 112. Ai punti ed alle tangenti del cerchio corrisponderanno i punti e le tangenti d'una conica ( $N^{\circ}$  18,  $f$ ). Dunque anche per una conica, una tangente è la retta che incontra la curva in due punti infinitamente vicini; e un punto della curva è l'intersezione di due tangenti infinitamente vicine; a due fasci uguali, epperò proiettivi, corrisponderanno due fasci proiettivi, e a due punteggiate proiettive corrisponderanno ancora due punteggiate proiettive; giacchè due fasci o due punteggiate che si corrispondano in due figure omologiche sono due forme prospettive. Dunque, dai detti teoremi si concluderà:

a) Se quantisivogliano punti  $ABCD \dots$  di una conica (fig. 79\*) si proiettano da due punti fissi  $O, O'$  della medesima, i raggi proiettanti  $O(A, B, C, D \dots)$ ,  $O'(A, B, C, D \dots)$  formano due fasci proiettivi. Al raggio  $OO'$  del primo fascio corrisponde la tangente in  $O'$ , ed al raggio  $O'O$  del secondo fascio corrisponde la tangente in  $O$ .

b) Quantesivogliano tangenti  $abcd \dots$  di una conica (fig. 80\*) segano due tangenti fisse  $o, o'$  della medesima in punti formanti due punteggiate proiettive. Al punto

(<sup>1</sup>) BALTZER, *Trigon.*, pag. 457.

oo' della prima punteggiata corrisponde il punto di contatto di  $o'$ ; ed al punto  $o'o$  della seconda punteggiata corrisponde il punto di contatto di  $o$  (1).

c) La punteggiata che più tangenti d'una conica (fig. 81<sup>a</sup>) determinano sopra una tangente fissa è proiettiva al fascio che proietta i punti di contatto da un punto fisso della conica medesima.

**114.** Dimostreremo ora le proprietà inverse de' teoremi *a*), *b*); ossia:

*a*) Se due fasci di raggi esistenti in uno stesso piano (non concentrici) sono proiettivi (non prospettivi), il luogo del punto comune a due raggi corrispondenti è una conica, passante pei centri de' due fasci, ed ivi toccata da quei raggi de' due fasci che corrispondono alla retta congiungente i centri.

Siano  $P, Q$  i centri de' due fasci (fig. 82<sup>a</sup>);  $PA$  e  $QA, PB$  e  $QB, \dots$  le coppie di raggi corrispondenti. Il luogo dei punti  $A, B, \dots$  passa pel punto  $Q$ , perchè in  $Q$  si segano il raggio  $PQ$  del fascio  $P$  ed il corrispondente raggio del fascio  $Q$ . Analogamente,  $P$  è un punto del luogo.

Sia  $q$  il raggio del fascio  $Q$  che corrisponde al raggio  $PQ$  del fascio  $P$ , e descrivasi un cerchio tangente a  $q$  in  $Q$ , il quale seghi le rette  $QA, QB, \dots, QP$  in  $A', B', \dots, P'$ . I triangoli  $PAB$  e  $P'A'B', PAC$  e  $P'A'C', \dots$  sono omologici; infatti le rette  $PP', AA', BB', CC', \dots$  concorrono tutte in  $Q$ ; dunque (N° 12, *b*) le coppie di lati  $PA$  e  $P'A', PB$  e  $P'B', PC$  e  $P'C', \dots, AB$  e  $A'B', AC$  e  $A'C', \dots$  si segheranno in punti di una retta fissa  $s$ . Ne segue (N° 16) che il cerchio e il luogo de' punti  $ABC \dots PQ$  sono curve omologiche;  $Q$  è il centro ed  $s$  è l'asse d'omologia. Dunque (N° 18, *f*) il luogo cercato è una conica.

Nelle due figure omologiche, il punto  $Q$  e la retta  $q$  corrispondono a sè stessi (N° 18, *h*); dunque la tangente in  $Q$  alla conica è la stessa retta  $q$ .

*b*) Se due rette punteggiate, situate in uno stesso piano (non sovrapposte) sono proiettive (non prospettive), le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti in-

(1) STEINER, *l. c.*, p. 439.

viluppano una conica; vale a dire, sono le tangenti di una conica. Questa conica tocca le due rette date, nei punti che corrispondono alla loro comune intersezione.

Siano  $s, s'$  (fig. 83<sup>a</sup>) le due rette punteggiate proiettive,  $A$  ed  $A', B$  e  $B', \dots$  coppie di punti corrispondenti. La curva invilupata dallo congiungenti  $AA', BB', \dots$  ha per tangente anche la retta  $s$ , perchè questa congiunge il punto  $s's$  o  $Q'$  della seconda punteggiata al corrispondente punto  $Q$  della prima. Analogamente,  $s'$  è un'altra tangente.

Descrivasi un cerchio tangente ad  $s$  in  $Q$ , e ad esso tirinsi le tangenti  $AA'', BB'', \dots$  dai vari punti di  $s$ , le quali seghino in  $A'', B'', \dots$  la tangente che parte da  $Q'$ . Così la  $AA'$  seghi le  $BB'', CC'', \dots$  in  $H', K', \dots$ , e la  $AA''$  seghi le  $BB'', CC'', \dots$  in  $H'', K'', \dots$ . I triangoli  $A'B'H'$  ed  $A'B''H''$ ,  $A'C'K'$  ed  $A'C''K''$ , ... sono omologici, perchè le coppie di lati  $A'B'$  ed  $A'B''$ ,  $A'H'$  ed  $A'H''$ ,  $B'H'$  e  $B'H''$ , ... si segano nei punti  $Q', A, B, C, \dots$  nella retta fissa  $s$ ; dunque (N° 13) le congiungenti dei vertici  $A'A'', B'B'', C'C'', \dots$   $H'H'', K'K'', \dots$  concorreranno in un punto fisso  $O$ . Segue da ciò che la figura formata dalle rette  $AA', BB', CC', \dots$  e la figura formata dalle  $AA'', BB'', CC'', \dots$  cioè dalle tangenti del cerchio sono omologiche (N° 16):  $s$  è l'asse ed  $O$  è il centro d'omologia; dunque l'inviluppo cercato è una curva omologica ad un cerchio; vale a dire, essa è una conica (N° 18,  $f$ ).

Nelle due figure omologiche, la retta  $s$  ed il punto  $Q$  corrispondono a sè medesimi (N° 18,  $h$ ); dunque il punto di contatto della conica con  $s$  è  $Q$  (<sup>1</sup>).

$c$ ) I teoremi  $a)$ ,  $b)$  del presente N° sono correlativi (N° 27), giacchè la figura costituita dai punti d'intersezione de' raggi corrispondenti di due fasci proiettivi ha per correlativa la figura formata dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive. Dunque, in due figure correlative (secondo la legge di dualità nel piano) ai punti di una conica corrispondono le tangenti di un'altra conica.

**115.** Avuto riguardo ai N° 58 e 61, i teoremi dei N° 113 e 114 si possono anche formulare come segue:

$a)$  Il rapporto anarmonico delle quattro rette che da

(<sup>1</sup>) CHASLES, *Traité des sections coniques* (Paris 1865), N° 8, 9.

quattro punti fissi di una conica vanno ad un punto variabile della medesima è costante.

b) Il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui quattro tangenti fisse di una conica sono segate da una tangente variabile della medesima è costante (1).

Si denomini rapporto anarmonico di quattro punti dati  $ABCD$  di una conica il rapporto anarmonico delle quattro rette  $O(A.B.C.D)$ , dove  $O$  sia un punto qualsivoglia della conica. Si denomini rapporto anarmonico di quattro tangenti date  $abcd$  di una conica il rapporto anarmonico de' quattro punti  $o(a.b.c.d)$ , dove  $o$  sia una tangente qualsivoglia della conica.

c) Il rapporto anarmonico di quattro tangenti di una conica è uguale al rapporto anarmonico de' loro punti di contatto (2).

a') Il luogo di un punto dal quale quattro punti dati  $ABCD$  siano proiettati mediante quattro raggi il cui rapporto anarmonico sia dato è una conica che passa pei punti dati. La tangente in uno di questi, per esempio in  $A$ , è una tal retta che colle  $AB, AC, AD$  dà un gruppo il cui rapporto anarmonico è uguale al dato.

b') La curva invilupata dalle rette che sono segate da quattro rette date in quattro punti aventi un rapporto anarmonico dato è una conica, che tocca anche le rette date. Il punto di contatto di una di queste, per esempio di  $a$ , forma insieme coi punti  $ab, ac, ad$  un gruppo il cui rapporto anarmonico ha il valor dato (3).

**116.** Per cinque punti  $O, O', A, B, C$  dati ad arbitrio in un piano (fig. 79\*), tre qualunque de' quali non siano in linea retta, si può descrivere una conica. Infatti, basterà costruire i fasci proiettivi, i cui centri sono due de' punti dati, per esempio  $O, O'$ , in modo che negli altri tre punti si seghino tre coppie di raggi corrispon-

Si può descrivere una conica che tocchi cinque rette  $o, o', a, b, c$  date in uno stesso piano (fig. 80\*), tre qualunque delle quali non concorrano insieme. Infatti, basterà costruire le punteggiate proiettive, mediante le tre coppie di punti corrispondenti ( $oa$  ed  $o'a$ ,  $ob$  ed  $o'b$ ,  $oc$  ed  $o'c$ ) che tre delle rette date  $a, b, c$  determinano sulle

(1) STEINER, *I. c.*, p. 156.

(2) CHASLES, *Géom. sup.*, N° 663.

(3) STEINER, *I. c.*, p. 156-7.

denti  $OA$  ed  $O'A$ ,  $OB$  ed  $O'B$ ,  $OC$  ed  $O'C$ . Ogni altra coppia  $OD$ ,  $O'D$  di raggi corrispondenti darà un nuovo punto  $D$  della curva.

a) Per costruire la tangente in uno de' punti dati, per es. in  $O$ , basterà determinare il raggio del fascio  $O$  che corrisponde al raggio  $O'O$  del fascio  $O'$ .

b) Pei cinque punti dati non passa che una sola conica; se ne passassero due, queste avrebbero in comune infiniti altri punti (determinati dalle coppie di raggi corrispondenti de' fasci proiettivi), il che è assurdo.

c) Di qui segue inoltre:

Per quattro punti passano infinite coniche; due qualunque di esse non hanno alcun punto comune, oltre ai quattro dati.

altre due  $o$ ,  $o'$ . La congiungente  $d$  di ogni altra coppia di punti corrispondenti sarà una nuova tangente della curva.

Per costruire il punto di contatto di una delle rette date, per es. di  $o'$ , basterà determinare il punto della punteggiata  $o$  che corrisponde al punto  $o'o$  della punteggiata  $o'$ .

Vi è una sola conica che tocchi le cinque rette date; se ce ne fossero due, esse avrebbero infinite altre tangenti comuni (le rette determinate dalle coppie di punti corrispondenti delle punteggiate proiettive), il che è assurdo.

Vi sono infinite coniche alle quali sono tangenti quattro rette date; due qualunque di quelle coniche non possono avere un'altra tangente comune.

## 117. Adesso i teoremi del N° 70 si possono enunciare come segue:

Se un esagono è circoscritto ad una conica (fig. 53° e 84°), le rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto (1).

Se un esagono è inscritto in una conica (fig. 54° e 85°), le tre coppie di lati opposti si segano in tre punti d'una stessa retta (2).

a) Il teorema di PASCAL concerne sei punti come quello di BRIANCHON sei tangenti di una conica: i quali sei punti o tangenti possono essere presi ad arbitrio fra tutt'i punti o tutte le tangenti della curva. E siccome la conica è individuata da cinque punti o da cinque tangenti; che è quanto dire, che cinque punti o cinque tangenti possono essere assunti ad arbitrio fra i punti o le rette del piano, e che, dopo avere scelti questi cinque elementi, la conica

(1) Teorema di BRIANCHON: pubblicato la prima volta nel 1806 e riprodotto più tardi nel *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris 1817), pag. 34.

(2) Teorema di PASCAL: *Essais pour les coniques*, opuscolo di sette pagine in-8°, pubblicato la prima volta nel 1640, quando l'Autore non aveva che sedici anni, poi riprodotto nell'edizione delle *Oeuvres de Pascal* (Haye 1779) ed anche recentemente dal signor WEISSENBOHN nella prefazione al suo libro *Die Projection in der Ebene* (Berlin 1862).

risulta determinata; così il teorema di PASCAL esprime la condizione necessaria e sufficiente, alla quale debbono soddisfare sei punti del piano affinché per essi possa descriversi una conica; e il teorema di BRIANCHON è del pari la condizione necessaria e sufficiente, cui devono soddisfare sei rette del piano, affinché si possa descrivere una conica che le tocchi tutte e sei.

b) Che la condizione sia necessaria risulta dagli stessi enunciati del N° 117; sei punti di una conica si possono considerare, presi in un ordine qualunque, come vertici di un esagono inscritto; e siccome per ogni esagono inscritto ha luogo il teorema di PASCAL, così è necessario che, in qualunque ordine vengano connessi i sei punti per formare l'esagono, le coppie di lati opposti concorrano in tre punti in linea retta.

c) La condizione è anche sufficiente. Infatti (fig. 85\*), supponiamo che l'esagono  $AB'CA'BC'$ , risultante dal prendere i sei punti in un certo ordine, abbia la proprietà che le coppie di lati opposti  $BC'$  e  $B'C$ ,  $CA'$  e  $C'A$ ,  $AB'$  ed  $A'B$  concorrano in tre punti  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  di una retta.

Pei punti  $AB'CA'B$  passa una (ed una sola) conica, la quale incontrerà la retta  $AC'$  in un certo punto  $X$ . Allora  $AB'CA'BX$  sarà un esagono inscritto, e le coppie di lati opposti  $B'C$  e  $BX$ ,  $XA$  ossia  $C'A$  e  $CA'$ ,  $A'B$  ed  $AB'$  si segheranno in tre punti in linea retta, il secondo e il terzo de' quali sono  $Q$ ,  $R$ ; il primo è dunque l'intersezione di  $QR$  con  $B'C$  ossia  $P$ . Per  $P$  passa adunque sì la  $BX$ , sì la  $BC'$ ; dunque le rette indefinite  $BX$  e  $BC'$  coincidono. Di qui risulta che il punto  $X$  è situato e nella  $AC'$  e nella  $BC'$ ; esso è dunque precisamente il punto  $C'$ ; c.d.d.

d) Sei punti, secondo i diversi ordini ne' quali vengono connessi con linee rette, danno sessanta esagoni (semplici). Dal ragionamento ora fatto risulta che, se uno qualunque di questi esagoni ha la proprietà che le coppie di lati opposti si seghino in tre punti in linea retta, i sei punti appartengono ad una stessa conica, epperò la medesima proprietà compete a tutti gli altri esagoni (1).

e) Considerazioni correlative a quelle ora esposte in b), c), d) si potrebbero fare per il sistema di sei rette, rispetto al teorema di BRIANCHON.

(1) STEINER, l. c., p. 311.

**118.** Consideriamo i due triangoli, l'uno de' quali è formato dal primo, terzo e quinto lato, l'altro dal secondo, quarto e sesto lato di un esagono inscritto  $AB'CA'BC$  (fig. 85\*). Assumendo come corrispondenti i lati  $BC'$  e  $B'C$ ,  $CA'$  e  $C'A$ ,  $AB'$  ed  $A'B$ , il teorema di PASCAL dice che questi si segano in tre punti di una stessa retta; dunque (N° 13) i due triangoli sono omologici. Ne segue che il teorema di PASCAL può enunciarsi così:

So due triangoli sono omologici, i punti ne' quali i lati dell'uno incontrano i lati non corrispondenti dell'altro sono situati in una stessa conica.

Analogamente, in un esagono circoscritto  $ab'ca'bc'$  (fig. 84\*) si considerino i vertici di posto dispari ed i vertici di posto pari come vertici di due triangoli, ne' quali si assumano come corrispondenti i vertici  $bc'$  e  $b'c$ ,  $ca'$  e  $c'a$ ,  $ab'$  ed  $a'b$ . Il teorema di BRIANCHON dice che queste coppie di vertici sono allineate con uno stesso punto; dunque (N° 12) i due triangoli sono omologici, così che il detto teorema somministra l'enunciato che segue:

Se due triangoli sono omologici, le rette che congiungono i vertici dell'uno ai vertici non corrispondenti dell'altro sono tangenti di una stessa conica.

I due enunciati possono ancora riunirsi in un solo, così:

Se due triangoli sono omologici, i punti ne' quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro appartengono ad una conica; e le rette che dai vertici dell'uno vanno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica (1).

**119.** Ponendo mente alla fig. 85\*, nella quale si considerino i punti  $AB'CA'B$  come dati o  $C'$  come variabile, il teorema di PASCAL si può anche presentare così:

Se un triangolo  $C'TQ$  si deforma in modo che i suoi lati  $PQ$ ,  $PC'$ ,  $QC'$  ruotino attorno ai punti fissi  $R$ ,  $B$ ,  $A$ , mentre due vertici  $P$ ,  $Q$  scorrano su due rette fisse  $CB'$ ,  $CA'$ , il terzo vertice  $C'$  descrive una conica, che passa per punti dati  $A$ ,  $B$ , per il punto  $C$  comune alle rette date, per il punto  $B'$  comune alle  $AR$ ,  $CB'$  e per il punto  $A'$  comune alle  $BR$ ,  $CA'$  (2).

(1) STEINER, I. c., p. 452.

(2) Questo teorema fu dato da MACLAURIN nel 1721. Cfr. le Transazioni filosofiche della Società reale di Londra per l'anno 1735 (a pag. 121 della traduzione francese,

Analagamente, il teorema di BRIANCHON si potrà fogggiare come segue:

Se un triangolo  $c'pq$  (fig. 84<sup>a</sup>) si deforma in modo che i suoi vertici  $pq, pc', qc'$  si muovano sulle rette fisse  $r, b, a$ , mentre due lati  $p, q$  ruotino attorno ai punti fissi  $cb', ca'$ , il terzo lato  $c'$  inviluppa una conica, che è toccata dalle rette date  $a, b$ , dalla congiungente  $c$  dei punti fissi, dalla retta  $b'$  che unisce i punti  $ar, cb'$ , e dalla retta  $a'$  che dal punto  $br$  va al punto  $ca'$ .

120. Se nelle proposizioni del N° 116, a destra, supponiamo che una tangente sia la retta all'infinito, la conica sarà una parabola (N° 18,  $g$ ); dunque

Una parabola è individuata da quattro tangenti;

Ossia (N° 116,  $b$ , a destra):

Vi è una sola parabola che tocchi quattro rette date.

a) Facendo la stessa ipotesi nel teorema N° 113,  $b$ ), i punti all'infinito delle due tangenti, punteggiate proiettive, saranno punti corrispondenti, giacchè la retta che li unisce è una tangente della curva. Dunque (N° 74):

Quantesivogliano tangenti di una parabola segano due tangenti fisse della medesima in punti che costituiscono due punteggiate simili; ossia:

Due tangenti fisse di una parabola sono divise da tutte le altre tangenti in parti proporzionali (1).

Le due tangenti fisse siano segate dalle altre ne' punti  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ , ... (fig. 86<sup>a</sup>); e siano  $P, Q'$  i punti di contatto di quelle, così che il punto comune alle medesime si dovrà indicare con  $Q$  o con  $P'$ , secondo che si consideri come punto dell'una o dell'altra. Avranno dunque luogo le uguaglianze

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \dots = \frac{BC}{B'C'} = \dots = \frac{AP}{A'P'} = \frac{AQ}{A'Q'} = \dots = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

b) Viceversa (N° 114,  $b$ ), date (in un piano) due rette punteggiate simili, tutte le rette che congiungono cop-

ed. a Bologna 1741), e: CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837), p. 450. Se il punto  $R$  si suppone all'infinito, il teorema diviene il lemma 20 di NEWTON, *Philosophiæ naturalis Principia mathematica*, lib. I (pag. 498 dell'ediz. Coloniae 1760; la 1<sup>a</sup> edizione è del 1686).

(1) APOLLONI PERGÆI, *Conicorum*, lib. III, 41.



pie di punti corrispondenti sono tangenti di una stessa parabola, che tocca le rette date ne' punti che corrispondono alla loro mutua intersezione.

Infatti, la retta all'infinito è in questo caso una tangente della conica, giacchè unisce i due punti all'infinito delle rette date, i quali sono punti corrispondenti (N° 73).

**121.** Nel teorema del N° 114, *a*), si supponga il punto  $P$  all'infinito, vale a dire il primo fascio formato da raggi paralleli. Alla retta  $QP$  (cioè alla retta parallela ai raggi del primo fascio e passante pel centro del secondo), considerata come raggio  $p'$  del secondo fascio, corrisponde nel primo la retta  $p$ , tangente in  $P$ : ora questa retta  $p$  può essere a distanza finita o a distanza infinita.

Nel 1° caso (fig. 87\*), la retta all'infinito è un raggio  $j$  del primo fascio, a cui corrisponderà nel secondo fascio un raggio  $j'$  diverso da  $p'$ , epperò non passante per  $P$ ; dunque la conica sarà un'iperbole (N° 18, *g*), i cui punti all'infinito sono  $P \equiv pp'$  e  $jj'$ ; la retta  $p$  è uno degli assintoti, e  $j'$  è parallela all'altro.

Nel 2° caso (fig. 88\*), la retta all'infinito è tangente in  $P$  alla conica, epperò questa è una parabola.

**122.** Se nel medesimo teorema del N° 114, *a*) si suppongono entrambi i punti  $P$ ,  $Q$  a distanza infinita (fig. 89\*), ciascuno de' due fasci proiettivi sarà formato da raggi paralleli; e la conica generata per mezzo di essi, dovendo passare pei centri  $P$ ,  $Q$ , sarà un'iperbole (N° 18, *g*). Gli assintoti dell'iperbole sono le tangenti ne' suoi punti all'infinito (1); epperò saranno que' raggi  $p$ ,  $q'$  del primo e del secondo fascio che corrispondono alla retta all'infinito, considerata come raggio del secondo e del primo fascio, rispettivamente.

Secondo il teorema generale N° 113, *b*), gli assintoti dell'iperbole sono incontrati da tutte le altre tangenti in punti costituenti due punteggiate proiettive, nelle quali i punti di contatto, che qui sono all'infinito, corrispondono al punto  $O$  ove si segano gli assintoti. Dunque l'equazione  $JM \cdot IM' = \text{cost.}$  dei N° 59, 83 diviene nel caso nostro  $OM \cdot OM' = \text{cost.}$ , dove  $M$ ,  $M'$  siano le intersezioni di una tangente qualunque cogli assintoti. Concludiamo pertanto:

(1) DESARGUES, *l. c.*, p. 210; — NEWTON, *l. c.*, scolio alla prop. 27.

Il prodotto dei segmenti fatti da una tangente qualunque dell'iperbole sui due assintoti, contati a partire dal punto d'incontro di queste due rette, ha un valore costante.

Ed anche si può dire:

L'area del triangolo racchiuso da una tangente qualunque dell'iperbole e dagli assintoti è costante (1).

**123.** Applichiamo il teorema del N° 113, b) anche al caso di due tangenti fisse parallele, segate da una tangente variabile in  $M, M'$ . Nelle punteggiate proiettive generate da questi punti, al punto (all'infinito) comune alle due tangenti fisse corrispondono i loro punti di contatto; designandoli pertanto con  $J, I'$ , avremo in virtù del citato N° 59, l'uguaglianza  $JM \cdot IM' = \text{cost.}^{\circ}$ . Dunque:

Il prodotto dei segmenti che una tangente variabile determina in due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costante (2).

## § 15. Costruzioni ed esercizi.

**124.** Per mezzo de' teoremi correlativi del N° 117 si risolvono i problemi seguenti:

Date cinque rette  $ab'ca'b$  tangenti di una conica, costruire la tangente che ad essa si può condurre da un punto  $H$ , dato in una delle tangenti date,  $a$  (fig. 90<sup>a</sup>).

Indicata con  $c'$  la tangente richiesta, l'esagono  $ab'ca'bc'$  avrà la proprietà espressa nel teorema di BRIANCHON. Conducansi la diagonale  $r$  che unisce i due vertici opposti  $ab'$  ed  $a'b$ , e la diagonale  $q$  che unisce i due vertici opposti  $ca'$  e  $c'a$  (dove  $c'a$  è il punto dato  $H$ ). Pel punto  $qr$  dovrà passare anche la diagonale che unisce gli altri due vertici opposti  $bc'$  e  $b'c$ .

Dati cinque punti  $AB'CA'B$  di una conica, trovare il punto comune ad essa e ad una retta data  $r$ , la quale passi per uno de' punti dati,  $A$  (fig. 91<sup>a</sup>).

Indicato con  $C'$  il punto cercato, l'esagono  $AB'CA'BC'$  avrà la proprietà espressa nel teorema di PASCAL. Sia dunque  $R$  il punto comune alle  $AB', A'B$  (due lati opposti dell'esagono);  $Q$  il punto comune alle  $CA', r$  (altri due lati opposti); la congiungente  $QR$  dovrà segare in uno stesso punto  $P$  gli altri due lati opposti  $B'C$  e  $BC'$ . Dunque, se il punto  $P$ , co-

(1) APOLLONIO, I. c., III, 43.

(2) APOLLONIO, I. c., III, 42.

Dunque, se  $p$  è la congiungente dei punti  $qr$  e  $b'e$ , il punto  $pb$  congiunto col punto dato darà la retta domandata  $c'$ .

Se ora si danno altre posizioni al punto dato  $H$  (purchè sia sempre in una delle tangenti conosciute), e ciascuna volta si ripeta la costruzione che precede, si otterranno quante tangenti si vogliono della conica. Dunque, il teorema di BRIANCHON serve a costruire per tangenti la conica individuata da cinque tangenti date (1).

mune alle  $B'C$ ,  $QR$ , vien congiunto a  $B$ , la  $BP$  segnerà  $r$  nel punto cercato  $C'$ .

Se ora si danno altre posizioni alla retta data (purchè passi sempre per uno de' punti conosciuti della conica), e ciascuna volta si ripeta la costruzione che precede, si otterranno quanti punti si vogliono della conica. Dunque, il teorema di PASCAL serve a costruire per punti la conica individuata da cinque punti dati (2).

**125.** Nel problema che precede, a destra, il punto  $B$  sia a distanza infinita. La conica sarà allora (in generale) un'iperbole, della quale si conoscono i punti  $AB'CA'$ , e la direzione di un assintoto; e si domanda la seconda intersezione con una retta data  $r$  passante per  $A$  (fig. 92<sup>a</sup>).

La soluzione si ricava da quella del problema suddetto, portando il punto  $B$  all'infinito nella direzione data. Vale a dire: congiungasi il punto  $R$  comune alla  $AB'$  ed alla retta condotta per  $A'$  nella direzione data col punto  $Q$  comune alle  $r$ ,  $A'C$ ; poi pel punto  $P$  comune alle  $QR$ ,  $B'C$  si conduca una retta parallela ad  $A'R$ , la quale segnerà  $r$  nel punto cercato  $C'$ .

a) Se invece è all'infinito il punto  $A$ , il problema diviene il seguente:

Dati quattro punti  $B'CA'B$  e la direzione d'un assintoto di un'iperbole, trovare l'intersezione di questa con una data retta  $r$ , parallela all'assintoto (fig. 93<sup>a</sup>).

**SOLUZIONE.** — Congiungasi il punto  $R$  comune alla  $A'B$  ed alla retta condotta per  $B'$  nella direzione data, col punto  $Q$  comune alla  $A'C$  ed alla retta data; poi si unisca il punto  $B$  col punto  $P$  comune alle  $QR$ ,  $B'C$ ; la  $BP$  segnerà la retta data nel punto cercato  $C'$ .

b) Siano all'infinito i punti  $A'$ ,  $B$ ; avremo allora il problema che segue:

Dati tre punti  $ABC$  e le direzioni degli assintoti d'un'iperbole, trovare il secondo punto comune alla curva e ad una data retta  $r$  passante per  $A$  (fig. 94<sup>a</sup>).

**SOLUZIONE.** — Pel punto  $Q$  comune ad  $r$  ed alla retta condotta per  $C$  nella direzione del primo assintoto si tiri la parallela alla  $AB'$ , la quale seghi in  $P$  la  $B'C$ ; per  $P$  si tiri la parallela al secondo assintoto; questa segnerà  $r$  nel punto cercato  $C'$ .

c) Supponendo invece all'infinito i punti  $A$ ,  $B'$ , il problema risoluto dalla esposta costruzione sarà quest'altro:

(1) BRIANCHON, *l. c.*, p. 38; — PONCELET, *l. c.*, N° 209.

(2) NEWTON, *l. c.*, prop. 22; — MACLAURIN, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus* (Londini 1748), § 44.

Di un'iperbole si conoscono tre punti  $CA'B$  e le direzioni dei due assintoti; si domanda l'intersezione della curva con una data retta  $r$ , parallela al primo assintoto (fig. 95°).

**SOLUZIONE.** — Per  $Q$ , punto comune alle  $r$ ,  $CA'$  si conduca la parallela ad  $A'B$ , la quale seghi in  $P$  la parallela al secondo assintoto tirata per  $C$ ; la  $BP$  segnerà la retta data nel punto cercato  $C'$ .

d) E ancora suppongansi a distanza finita i punti  $B'CA'B$ , e all'infinito tutta la retta  $AC'$ . Avremo allora il problema:

Conoscendo quattro punti  $B'CA'B$  di un'iperbole e la direzione di un assintoto, trovare la direzione dell'altro assintoto (fig. 96°).

**SOLUZIONE.** — Da  $R$  punto comune alla  $A'B$  ed alla retta condotta per  $B'$  nella direzione data, si guidi la parallela alla  $CA'$ , che seghi in  $P$  la  $B'C$ . La  $BP$  avrà la direzione richiesta.

Tutti questi problemi non sono che casi particolari di quello del N° 124 a destra; e sarà bene che lo studente si eserciti a ricavare dalla costruzione generale le costruzioni per i casi particolari, la qual cosa richiede soltanto d'aver presente che il congiungere un punto dato a distanza finita con un altro situato all'infinito in una direzione data equivale a condurre pel primo punto la parallela alla direzione data.

**126.** In modo analogo, consideriamo: i casi particolari del problema del N° 124, a sinistra, supponendo che qualche elemento si allontani all'infinito.

Supponiamo in primo luogo che il punto  $ac'$  sia all'infinito. Il problema da risolvere allora sarà:

Date cinque tangenti  $ab'ca'b$  di una conica, costruire la tangente parallela ad una delle date, per esempio ad  $a$  (fig. 97°).

**SOLUZIONE.** — Si costruiscano: la retta  $r$  che unisce i punti  $ab'$ ,  $a'b$ ; la retta  $q$  che passa pel punto  $a'c$  ed è parallela ad  $a$ ; e la retta  $p$  che congiunge i punti  $qr$ ,  $b'c$ ; la tangente cercata  $c'$  passerà pel punto  $pb$ .

Da un punto qualunque del piano si possono condurre ad una conica tutt'al più due tangenti (N° 18, f); da un punto di una tangente data si può condurre soltanto un'altra tangente. Dunque se la conica è una parabola, due tangenti non possono mai essere parallele.

a) Sia all'infinito la retta  $b$ ; avremo il problema:

Date quattro tangenti  $ab'ca'$  di una parabola, costruire la tangente che passa per un punto dato  $H$  di  $a$  (fig. 98°).

**SOLUZIONE.** — Si costruiscano: la retta  $r$  che passa pel punto  $ab'$  ed è parallela ad  $a'$ ; la retta  $q$  che congiunge il punto dato  $H$  col punto  $a'c$ ; e la retta  $p$  che unisce i punti  $qr$ ,  $b'c$ . La tangente cercata sarà parallela alla  $p$ .

b) Se è all'infinito la retta  $a$ , abbiamo il problema:

Date quattro tangenti  $b'ca'b$  di una parabola, costruire la tangente che ha una direzione data (fig. 99°).

**SOLUZIONE.** — Si costruiscano: la retta  $r$  che passa pel punto  $a'b$  ed è parallela a  $b'$ ; la retta  $q$  che passa pel punto  $a'c$  ed ha la direzione data;

e la retta  $p$  che unisce i punti  $b'c$ ,  $qr$ . La tangente cercata passerà pel punto  $pb$ .

c) Variando nel penultimo problema la posizione del punto dato su  $\alpha$ , o nell'ultimo la direzione data, si giunge alla risoluzione del problema:

Costruire le tangenti della parabola determinata da quattro tangenti date.

## § 16. Corollari dei teoremi di PASCAL e BRIANCHON.

127. Già abbiamo addotto parecchie proposizioni e costruzioni (N° 124 e seg.) che sono immediate conseguenze de' teoremi di PASCAL e BRIANCHON, nascenti dal supporre qualche elemento allontanato a distanza infinita. Altri corollari si ottengono se si imagina che due de' sei punti o delle sei tangenti siano infinitamente vicine (<sup>1</sup>).

Se  $AB'CA'BC'$  sono sei punti di una conica, il teorema di PASCAL dice in sostanza che sono proiettivi per es. i fasci  $A(A'B'CC')$ ,  $B(A'B'CC')$ . In essi, al raggio  $AB$  del primo corrisponde la retta che tocca la conica in  $B$ ; sicchè si può invece dire essere proiettivo il gruppo delle quattro rette

$$AA', AB', AC, AB$$

al gruppo formato dalle

$$BA', BB', BC$$

e dalla tangente in  $B$ ; e ciò equivale manifestamente a supporre che il punto  $C'$ , dianzi preso ad arbitrio nella curva, sia ora infinitamente vicino a  $B$ . L'esagono inscritto si muta adunque nella figura costituita dal pentagono inscritto  $AB'CA'B$  e dalla tangente  $b$  nel vertice  $B$  (fig. 100\*); ond'è che il teorema di PASCAL diviene:

Se un pentagono ( $AB'CA'B$ ) è inscritto in una conica, il punto comune a due lati non consecutivi ( $AB'$ ,  $A'B$ ), il punto comune a due altri lati non consecutivi ( $AB$ ,  $CA'$ ), ed il punto ove il quinto lato ( $B'C$ ) incontra la tangente nel vertice opposto ( $B$ ) sono in linea retta.

(<sup>1</sup>) CARNOT, *l. c.*, pag. 455-6.

Possiamo ricavare questo corollario anche dalla costruzione (N° 66, a destra) di due fasci proiettivi. Date le coppie  $AA'$  e  $BA'$ ,  $AC$  e  $BC$ ,  $AB'$  e  $BB'$  di raggi corrispondenti, si seghino i due fasci colle trasversali  $CA'$ ,  $CB'$ , e sia  $R$  il punto di concorso delle  $AB$ ,  $AB'$ ; allora due raggi corrispondenti qualsivogliano de' fasci  $A$ ,  $B$  dovranno rispettivamente segare le trasversali  $CA'$ ,  $CB'$  in due punti allineati con  $R$ . Laonde, per ottenere quel raggio del secondo fascio che corrisponde ad  $AB$ , vale a dire la tangente in  $B$ , basta congiungere  $R$  col punto  $Q$  comune alle  $CA'$ ,  $AB$ ; la retta domandata sarà quella che da  $B$  va al punto  $P$  intersezione delle  $CB'$ ,  $QR$ . Questa costruzione coincide appunto col corollario sopra enunciato.

**128.** Questo corollario serve a risolvere i due problemi seguenti:

1° Dati cinque punti  $A, B, C, A', B'$  di una conica, costruire la tangente in uno de' punti dati,  $B$  (fig. 100°).

**SOLUZIONE.** — Congiungasi il punto  $Q$  comune alle  $AB, CA'$  col punto  $R$  comune alle  $AB', A'B$ ; e sia  $P$  l'intersezione delle  $B'C, QR$ . Sarà  $BP$  la tangente domandata (1°).

**CASI PARTICOLARI.** — (Sia uno de' punti  $ABCA'$  all'infinito). Conoscendosi quattro punti di un'iperbole e la direzione di un assintoto, costruire la tangente in uno de' punti dati.

(Sia  $B$  all'infinito). Conoscendosi quattro punti di un'iperbole e la direzione di un assintoto, costruire quest'assintoto.

(Siano all'infinito due de' punti  $ABCA'$ ). Conoscendosi tre punti di un'iperbole e le direzioni degli assintoti, costruire la tangente in uno de' punti dati.

(Siano all'infinito  $B$  ed uno degli altri punti). Conoscendosi tre punti di un'iperbole e le direzioni degli assintoti, costruire un assintoto.

2° Dati quattro punti  $ABA'C$  di una conica e la tangente in  $B$ , costruire la conica per punti; per es. trovare quel punto che la curva ha comune con una data retta  $r$  passante per  $A$  (fig. 100°).

**SOLUZIONE.** — Sia  $R$  il punto comune alle  $r, A'B$ ;  $Q$  il punto ove  $AB$  sega  $CA'$ ; e  $P$  il punto comune alla  $QR$  ed alla tangente data. Il punto cercato sarà quello in cui la  $CP$  sega la retta data.

Supponendo all'infinito uno o due de' punti  $AA'C$ , ovvero il punto  $A$  e la retta  $r$ , ovvero il punto  $B$ , ovvero il punto  $B$  ed uno degli altri punti, ovvero il punto  $B$  e la tangente data, si hanno i seguenti casi particolari:

Costruire per punti l'iperbole della quale si conoscano tre punti, la tangente in uno di questi e la direzione di un assintoto; ovvero due punti, la tangente in uno di questi e le direzioni degli assintoti; ovvero tre punti ed un assintoto; ovvero due punti, un assintoto e la direzione dell'altro;

Costruire la parabola, della quale si conoscano tre punti a distanza finita e la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito.

(1) MACLAURIN, I. c., § 40.

**129.** Tornando ora all'esagono  $AB'CA'BC'$  inscritto in una conica, si supponga che non solo  $C$  sia infinitamente vicino a  $B$ , ma anche  $B'$  e  $C$  siano infinitamente vicini; la figura allora ci presenterà un quadrangolo inscritto  $AB'A'B$  e le tangenti ne' vertici  $B, B'$  (fig. 101<sup>a</sup>), e il teorema di PASCAL diviene:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il punto comune alle tangenti in due vertici opposti è in linea retta coi due punti di concorso delle coppie di lati opposti (1).

Ciò coincide con una proprietà già osservata altrove (N° 67, a destra). Infatti, se si considerino i fasci proiettivi i cui raggi corrispondenti sono  $BA$  e  $B'A$ ,  $BA'$  e  $B'A'$ , ..., la retta che dal punto  $Q$  comune alle  $BA$  e  $B'A'$  va al punto  $R$  comune alle  $B'A$ ,  $BA'$  dee passare per l'intersezione  $P$  de' raggi che corrispondono alla congiungente de' due centri  $B, B'$ .

**130.** Il corollario che precede serve a risolvere i seguenti problemi:

1° Dati quattro punti  $ABAB'$  di una conica e la tangente  $BP$  in  $B$ , costruire la tangente in  $B'$  (fig. 101<sup>a</sup>).

SOLUZIONE. — Siano:  $Q$  il punto comune alle  $AB, A'B'$ ;  $R$  il punto comune alle  $AB', A'B$ ; e  $P$  il punto comune alla tangente data ed alla  $QR$ . La tangente domandata sarà  $B'P$  (2).

Supponendo all'infinito alcuno de' punti dati o la retta data, si ottengono le soluzioni de' problemi speciali che seguono:

Costruire la tangente in un punto dato di un'iperbole della quale si conoscano: o due altri punti, la tangente in uno di questi e la direzione di un assintoto; o un altro punto, la tangente in esso e le direzioni degli assintoti; ovvero due altri punti e un assintoto; ovvero un altro punto, un assintoto e la direzione dell'altro assintoto;

Costruire l'assintoto dato in direzione di un'iperbole della quale siano inoltre dati tre punti e la tangente in uno di essi, ovvero due punti, la tangente in uno di essi e la direzione del secondo assintoto, ovvero due punti e il secondo assintoto;

Costruire la tangente in un punto dato di una parabola della quale si conoscano due altri punti a distanza finita e la direzione sulla quale è situato il punto all'infinito.

2° Costruire per punti la conica della quale siano dati tre punti  $ABB'$  e le tangenti  $BP, B'P$ ; per es. costruire il punto in cui la curva è segata da una retta  $r$  condotta ad arbitrio per  $B$  (fig. 101<sup>a</sup> bis).

SOLUZIONE. — Congiungasi il punto  $P$  comune alle tangenti date col punto  $R$  dove  $r$  incontra la  $AB'$ ; e sia  $Q$  l'intersezione delle  $AB, PR$ . La congiungente  $B'Q$  segnerà  $r$  nel punto cercato  $A'$ .

(1) MACLAURIN, *l. c.*, § 36.

(2) MACLAURIN, *l. c.*, § 38.

Supponendo all'infinito alcuno de' punti  $ABB'$ , o alcuna delle rette  $BP$ ,  $B'P$ ,  $r$ , si hanno le soluzioni de' seguenti casi particolari:

Costruire per punti l'iperbole della quale siano dati due punti colle rispettive tangenti e la direzione di un assintoto; ovvero due punti, la tangente in uno di essi e un assintoto; ovvero un punto colla rispettiva tangente, un assintoto e la direzione dell'altro; ovvero i due assintoti e un punto;

Costruire per punti la parabola della quale, oltre alla direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito, si conoscano due punti e la tangente in uno di questi.

**131.** Considerando, nello stesso quadrangolo  $ABA'B'$  (fig. 101\*), gli altri due vertici opposti  $A$  ed  $A'$ , anche le tangenti in essi si segheranno sulla retta che unisce il punto  $(AB, A'B)$  col punto  $(AB', A'B)$ ; dunque:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica i punti ove si segano i lati opposti e i punti ove si segano le tangenti ne' vertici opposti sono quattro punti in linea retta.

**132.** Scriviamo ora  $C, D, E, G$  in luogo di  $A', B', R, Q$  (fig. 102\*). Nel quadrangolo inscritto  $ABCD$  il punto comune alle tangenti in  $A$  e  $C$ , il punto comune alle tangenti in  $B$  e  $D$ , il punto comune ai lati  $AD, BC$  ed il punto comune ai lati  $AB, CD$  sono adunque in una stessa retta  $EG$ .

Gli stessi quattro punti  $A, B, C, D$ , presi in altro ordine formano due altri quadrangoli inscritti  $ACDB, ACBD$ . Dunque, se si applica l'ultimo teorema al quadrangolo inscritto  $ACDB$ , avremo che il punto comune alle tangenti in  $A$  e  $D$ , il punto comune alle tangenti in  $C$  e  $B$ , il punto comune ai lati  $AB, CD$  ed il punto comune ai lati  $AC, BD$  sono tutti in una medesima retta  $FG$ . Ed analogamente dal quadrangolo inscritto  $ACBD$  si caverà che le tangenti in  $A$  e  $B$ , le tangenti in  $C$  e  $D$ , i lati  $AD, CB$ , ed i lati  $AC, BD$  si segano in quattro punti di una medesima retta  $EF$  (1).

Le tre rette così ottenute,  $EG, FG, EF$ , sono i lati del triangolo diagonale (N° 30, b) del quadrangolo completo i cui vertici sono i quattro punti dati; e siccome le medesime rette contengono anche le intersezioni delle coppie di tangenti nei detti punti, così sono esse le diagonali del quadrilatero completo costituito dalle quattro tangenti; ossia:

(1) MACLAURIN, *l. c.*, § 37. — CARNOT, *l. c.*, pag. 453-4.



Il quadrilatero completo formato da quattro tangenti di una conica e il quadrangolo completo formato dai quattro punti di contatto hanno il medesimo triangolo diagonale.

Nella figura 102\*,  $abcd$  sono le quattro tangenti,  $ABCD$  i punti di contatto,  $EFG$  il triangolo diagonale.

**133.** Nel quadrilatero (completo) circoscritto  $abcd$  la diagonale che ha i termini nei punti  $ac$ ,  $bd$  incontra le altre due diagonali in  $E$ ,  $G$ ; questi quattro punti sono perciò armonici (N° 48). Correlativamente: i due lati opposti del quadrangolo (completo) inscritto  $ABCD$ , che concorrono in  $F$ , sono separati armonicamente mediante le rette che vanno agli altri due punti diagonali  $E$ ,  $G$  (N° 49). Si può adunque enunciare la proposizione che segue (fig. 102\*):

Quando un quadrilatero (semplice) inscritto ( $ABCD$ ) ha per vertici consecutivi i punti di contatto consecutivi d'un quadrilatero (semplice) circoscritto ( $abcd$ ): 1° le diagonali dei due quadrilateri passano per uno stesso punto ( $F$ ) e formano un gruppo armonico; 2° i punti di concorso delle coppie di lati opposti dei due quadrilateri sono in linea retta ( $EG$ ) e separati armonicamente; 3° le diagonali del quadrilatero circoscritto passano per i punti di concorso dei lati opposti del quadrilatero inscritto (1).

**134.** Mediante il teorema del N° 132, se sono date quattro tangenti  $abcd$  di una conica (fig. 102\*) ed uno dei punti di contatto  $A$ , si trovano subito gli altri tre; e così pure, se sono dati quattro punti  $ABCD$  e la tangente  $a$  in uno di essi, si costruiscono le tangenti negli altri tre (2).

**SOLUZIONE.** — Si costruisca il triangolo diagonale  $EFG$  del quadrilatero completo  $abcd$ ; le  $AG$ ,  $AF$ ,  $AE$  incontreranno rispettivamente le  $b$ ,  $c$ ,  $d$  in  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Si costruisca il triangolo diagonale  $efg$  del quadrangolo completo  $ABCD$ ; i punti  $ag$ ,  $af$ ,  $ae$  apparterranno rispettivamente alle tangenti domandate  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

**135.** Se consideriamo le quattro rette  $abcd$  come formanti un quadrilatero (non completo) circoscritto alla conica, possiamo dare

(1) CHASLES, *Sect. coniques*, N° 121.

(2) MACLAURIN, *I. c.*, § 38 e 39.

al teorema del N° 132 il seguente enunciato, del resto già compreso in quello del N° 133 (1):

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, le rette che uniscono i punti di contatto di due lati opposti passano pel punto comune alle diagonali (fig. 103\*).

a) Questa proprietà coincide con una già dimostrata a proposito di due punteggiate proiettive (N° 67, a sinistra). Infatti, se consideriamo le punteggiate proiettive  $a, c$  nelle quali sono punti corrispondenti  $ab$  e  $cb$ ,  $ad$  e  $cd$ , ..., la retta che congiunge i punti  $ab$  e  $cd$  e quella che congiunge i punti  $cb$  e  $ad$  si segano sulla retta che unisce i punti corrispondenti al punto  $ac$ , cioè sulla retta che unisce i punti di contatto di  $a$  e  $c$ .

b) Se la conica è un'iperbole, considerando il quadrilatero formato dagli assintoti e da due tangenti qualsivogliano, la proposizione ora enunciata dice che le diagonali sono parallele alla corda che unisce i punti di contatto delle due tangenti (2).

**136.** Il teorema che precede serve alla risoluzione del problema:

Costruire per tangenti la conica della quale siano date tre tangenti  $a, b, c$  e due punti di contatto  $A, C$ ; per esempio condurre una nuova tangente da un punto  $H$  dato in  $a$  (fig. 103\*).

**SOLUZIONE.** — Si congiunga il punto  $ab$  con quello che è comune alla  $AC$  ed alla  $H(bc)$ ; la congiungente incontrerà  $c$  in un punto che riunito ad  $H$  darà la tangente domandata  $d$ .

Supponendo all'infinito alcuno de' punti  $A, C$  o alcuna delle tangenti date, si hanno le soluzioni per diversi casi particolari:

Costruire per tangenti l'iperbole della quale sono dati un assintoto, due tangenti ed un punto di contatto; ovvero i due assintoti ed una tangente;

Costruire per tangenti la parabola della quale si conoscono il punto all'infinito, due tangenti ed un punto di contatto; ovvero due tangenti e i loro punti di contatto.

**137.** Se nel teorema di PASCAL si suppongono infinitamente vicini  $A$  e  $B'$ ,  $C$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $C'$ , avremo (fig. 104\*) un triangolo inscritto  $ABC$  e le tangenti ne' vertici; dunque:

Se un triangolo è inscritto in una conica, le tangenti ne' vertici incontrano i lati rispettivamente opposti in tre punti in linea retta.

**138.** Questo teorema risolve il problema:

Dati tre punti  $A, B, C$  di una conica e le tangenti in due di essi  $A, B$ , trovare la tangente nel terzo (fig. 104\*).

(1) NEWTON, *I. c.*, cor. 2° al lemma 24.

(2) APOLLONIO, *I. c.*, III, 44.

**SOLUZIONE.** — Le tangenti date incontrino rispettivamente  $BC, CA$  in  $P, Q$ ; e la  $PQ$  incontri  $AB$  in  $R$ ; sarà  $CR$  la tangente domandata.

Sono casi particolari di questo problema i seguenti:

Dati due punti  $A, B$  di un'iperbole, le tangenti in essi punti e la direzione di un assintoto, costruire questo assintoto.

Di un'iperbole si conoscono un assintoto, un punto  $A$  colla relativa tangente e la direzione dell'altro assintoto; costruire il secondo assintoto.

Di un'iperbole si conoscono i due assintoti ed un punto  $C$ ; costruire la tangente in  $C$ .

Di una parabola si conoscono due punti  $A, C$ , la tangente in  $A$ , e la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito; costruire la tangente in  $C$ .

**139.** Il triangolo inscritto  $ABC$  e il triangolo  $DEF$  formato dalle tangenti (fig. 104\*) hanno adunque la proprietà che le coppie de' loro lati  $BC$  ed  $EF$ ,  $CA$  ed  $FD$ ,  $AB$  e  $DE$  si segano in tre punti d'una retta. Perciò i due triangoli sono omologici, cioè (N° 13) le rette  $AD, BE, CF$ , che congiungono i vertici, passeranno per uno stesso punto  $O$ . Ossia:

Se un triangolo è circoscritto ad una conica, le rette che dai vertici vanno ai punti di contatto dei lati rispettivamente opposti concorrono in un punto.

**140.** Questo teorema risolve il problema:

Date tre tangenti di una conica e due punti di contatto, trovare il terzo.

**SOLUZIONE.** — Sia  $DEF$  (fig. 104\*) il triangolo circoscritto formato dalle tangenti date; ed  $A, B$  i punti di contatto di  $EF, FD$ . La  $AD, BE$  concorrano in  $O$ ; la  $FO$  segnerà  $DE$  nel punto domandato  $C$ .

**CASI PARTICOLARI:** Date due tangenti e un assintoto di un'iperbole, oltre al punto di contatto di una tangente, costruire il punto di contatto dell'altra tangente.

Dati i due assintoti e una tangente di un'iperbole, costruire il punto di contatto di questa tangente.

Date due tangenti o i punti di contatto di una parabola, costruire la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito.

Date due tangenti, il punto di contatto di una di esse e il punto all'infinito di una parabola, costruire il punto di contatto dell'altra tangente.

**141.** Come dal teorema di PASCAL si sono ricavati teoremi speciali, riguardanti il pentagono, il quadrangolo ed il triangolo inscritto, così, con un procedimento affatto analogo, si possono dedurre dal teorema di BRIANCHON le proposizioni correlative, concernenti il pentagono, il quadrilatero ed il triangolo circoscritto.

Infatti, se dalle sei tangenti  $ab'ca'bc'$ , formanti l'esagono circo-

scritto (N° 117, a sinistra), se ne suppongono due, per es.  $b$  e  $c'$ , infinitamente vicine, siccome una tangente incontra nel suo punto di contatto la tangente immediatamente successiva (N° 110, 113), così l'esagono circoscritto si muterà nella figura costituita dal pentagono circoscritto  $ab'ca'b$  e dal punto di contatto del lato  $b$  (fig. 105<sup>a</sup>). Il teorema di BRIANCHON dà allora:

Se un pentagono è circoscritto ad una conica, due diagonali congiungenti due coppie distinte di vertici e la retta che unisce il quinto vertice al punto di contatto del lato opposto, concorrono in uno stesso punto.

a) Questo teorema coincide con una proprietà delle punteggiate proiettive altrove già osservata (N° 66, a destra). Abbiassi infatti nelle rette  $a, b$  le punteggiate proiettive determinate dalle seganti  $a', b', c$ ; se la prima punteggiata vien proiettata dal punto  $ca'$  e la seconda dal punto  $cb'$ , si hanno due fasci prospettivi la cui comune sezione è la retta  $r$  che unisce i punti  $ab'$ ,  $a'b$ . Dunque, se si domanda il punto della seconda punteggiata, che corrisponde al punto  $ab$  della prima, vale a dire il punto di contatto della tangente  $b$ , basta tirare la retta  $q$  che da  $ca'$  proietta il punto  $ab$ , e quindi la retta  $p$  pei punti  $cb'$ ,  $qr$ ; il punto  $pb$  sarà il domandato.

b) La proprietà ora ottenuta del pentagono circoscritto dà il mezzo di risolvere i problemi seguenti:

1° Date cinque tangenti di una conica costruire il punto di contatto di una qualunque fra esse (<sup>1</sup>).

CASO PARTICOLARE: Date quattro tangenti di una parabola, trovare i punti di contatto e il punto all'infinito.

2° Costruire per tangenti la conica della quale siano date quattro tangenti ed un punto di contatto.

CASI PARTICOLARI: Costruire per tangenti l'iperbole della quale siano date tre tangenti ed un assintoto;

Costruire per tangenti la parabola della quale siano date tre tangenti e il punto all'infinito, ovvero tre tangenti ed un punto di contatto.

c) I corollari del teorema di BRIANCHON rispetto al quadrilatero e al triangolo inscritto non sono altro che i teoremi dei N° 135 e 139, e sono rispettivamente correlativi ai teoremi de' N° 129, 137; come sono correlativi fra loro quelli dei N° 127 e 141.

Sarà un utilissimo esercizio per lo studioso quello di risolvere da sè i problemi enunciati nel presente §; le costruzioni rientrano tutte in due sole, fra loro correlative, in quelle cioè che sono immediatamente somministrate dai teoremi di PASCAL e BRIANCHON.

(<sup>1</sup>) MACLAURIN, l. c., § 41.

**142.** I corollari dei teoremi di PASCAL e BRIANCHON mettono in evidenza che, come una conica è individuata da cinque punti o da cinque tangenti, così è pure individuata da quattro punti e dalla tangente in uno di essi, da quattro tangenti e da un punto di contatto, da tre punti e dalle tangenti in due di essi, da tre tangenti e da due punti di contatto. Donde segue che: 1° infinite coniche possono passare per tre punti dati e in uno di essi toccare una retta data, o passare per due punti dati e in essi toccare rette date; ma due qualunque di tali coniche non possono avere alcun altro punto comune; 2° infinite coniche possono toccare una retta data in un punto dato e due altre rette date, ovvero due rette date in punti dati; e due qualunque di tali coniche non hanno alcun'altra tangente comune.

Dunque, se due coniche toccano una retta data in uno stesso punto (cioè se le due coniche si toccano fra loro in questo punto), esse non possono avere inoltre più di due punti e più di due tangenti comuni; e se due coniche toccano due rette date in punti dati (cioè se le due coniche si toccano fra loro in due punti), esse non possono avere altri punti o altre tangenti comuni.

Si può anche dire che, se due coniche toccano una retta  $a$  in uno stesso punto  $A$ , questo equivale a due punti d'intersezione, e la retta  $a$  equivale a due tangenti comuni.

## § 17. Teorema di Desargues.

**143.** Un quadrangolo  $QRST$  (fig. 106<sup>a</sup>) sia inscritto in una conica, ed una trasversale arbitraria  $s$  seghi i lati  $QT, RS, QR, TS$  nei punti  $A, A', B, B'$  e la conica nei punti  $P, P'$ .

Sono proiettivi (N° 113,  $a$ ) i due gruppi di raggi che da  $Q$  e da  $S$  proiettano i punti  $P, R, P', T$  della conica, epperò proiettivi anche i due gruppi di punti  $PBP'A, PA'P'B'$  ne' quali i detti raggi sono segati dalla trasversale  $s$ . Dunque (N° 56) sono proiettivi i gruppi  $PBP'A, P'B'PA'$ , vale a dire (N° 94)

$$PP' \cdot AA' \cdot BB'$$

sono tre coppie di punti in involuzione. Si ha così il teorema di DESARGUES (1):

(1) *L. c.*, p. 171, 176.

Un quadrilatero  $qrst$  (fig. 107<sup>a</sup>) sia circoscritto ad una conica; e da un punto arbitrario  $S$  si tirino le rette  $a, a', b, b'$  ai vertici  $qt, rs, qr, ts$  del quadrilatero e le tangenti  $p, p'$  alla conica.

Sono proiettivi (N° 113,  $b$ ) i due gruppi di punti ne' quali la  $q$  e la  $s$  segano le tangenti  $p, r, p', t$  della conica, epperò proiettivi anche i due gruppi di raggi  $pbp'a, pa'p'b'$  che proiettano i detti punti da  $S$ . Dunque (N° 56) sono proiettivi i gruppi  $pbp'a, p'b'pa'$  vale a dire (N° 94)

$$pp' \cdot aa' \cdot bb'$$

sono tre coppie di raggi in involuzione. Si ha così il teorema (correlativo di quello di DESARGUES):

Una trasversale arbitraria incontra una conica e i lati opposti di un quadrangolo inscritto in tre coppie di punti coniugati in involuzione.

**144.** Questo teorema può servire, al paro di quello di PASCAL (N° 117, a destra), a costruire per punti la conica della quale siano dati cinque punti  $PQRST$  (fig. 106\*). Infatti, conducasi per  $P$  una trasversale arbitraria  $s$ , che seghi le  $QT$ ,  $RS$ ,  $QR$ ,  $TS$  in  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$ ; indi si costruisca il punto  $P'$  coniugato di  $P$  nell'involuzione determinata dalle coppie  $AA'$ ,  $BB'$  (N° 102), e sarà  $P'$  un punto della conica da descriversi.

**145.** All'involuzione determinata dai punti  $AA'$ ,  $BB'$  appartiene anche (N° 101, a sinistra) la coppia  $CC'$  de' punti in cui la trasversale sega le diagonali  $QS$ ,  $RT$  del quadrangolo inscritto.

Inoltre, bastando i punti  $AA'$ ,  $BB'$  a determinare l'involuzione, a questa appartengono i punti coniugati  $PP'$ , qualunque sia la conica circoscritta al quadrangolo  $QRST$ ; dunque:

Tutte le coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo sono incontrate da una trasversale arbitraria in coppie di punti in involuzione.

Se l'involuzione ha due punti doppi, ciascun di questi terrà luogo di due intersezioni  $PP'$  coincidenti (o infinitamente vicine), vale a dire, sarà il punto di contatto fra la trasversale ed una conica circoscritta al quadrangolo.

Le due tangenti condotte da un punto arbitrario ad una conica e le rette condotte dallo stesso punto ai vertici opposti di un quadrilatero circoscritto formano tre coppie di raggi coniugati in involuzione.

Questo teorema può servire, come quello di BRIANCHON (N° 117, a sinistra), a costruire per tangenti la conica della quale siano date cinque tangenti  $pqrst$  (fig. 107\*). Infatti, prendasi in  $p$  un punto arbitrario  $S$ , dal quale si tirino i raggi  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  ai punti  $qt$ ,  $rs$ ,  $qr$ ,  $ts$ ; indi si costruisca (N° 102) il raggio  $p'$  coniugato di  $p$  nell'involuzione determinata dalle coppie  $aa'$ ,  $bb'$ ; e sarà  $p'$  una tangente della conica da costruirsi.

All'involuzione determinata dai raggi  $aa'$ ,  $bb'$  appartiene anche (N° 101, a destra) la coppia  $cc'$  de' raggi che proiettano da  $S$  i punti  $qst$  di concorso de' lati opposti del quadrilatero circoscritto.

Inoltre, bastando i raggi  $aa'$ ,  $bb'$  a determinare l'involuzione, a questa appartengono i raggi coniugati  $pp'$ , qualunque sia la conica inscritta nel quadrilatero  $qrst$ ; dunque:

Le coppie di tangenti tirate da un punto arbitrario alle coniche inscritte in uno stesso quadrilatero formano un'involuzione.

Se l'involuzione ha due raggi doppi, ciascuno di questi farà le veci di due tangenti  $pp'$  coincidenti (o infinitamente vicine), vale a dire sarà tangente in  $S$  ad una conica inscritta nel quadrilatero.

Dunque, o vi sono due coniche passanti per quattro punti dati  $QRST$ , e tangenti ad una retta data  $s$  (che non passi per alcuno de' punti dati), o non vi è alcuna conica che soddisfaccia a tali condizioni.

**146.** Di sei punti  $AA' . BB' . PP'$  accoppiati in involuzione, se cinque sono dati, il sesto è individuato (N° 102). Perciò se nella fig. 106<sup>a</sup> supponiamo data la conica, e variabile il quadrangolo, in modo che i punti  $AA'B$  siano fissi, anche il punto  $B'$  resterà invariabile; dunque:

Se un quadrangolo, senza mai cessare d'essere inscritto in una conica, si deforma in modo che tre de' suoi lati ruotino intorno a tre punti fissi in linea retta, anche il quarto lato passerà per un quarto punto fisso della medesima retta.

Dunque, o vi sono due coniche tangenti a quattro rette date  $qrst$  e passanti per un punto dato  $S$  (non situato in alcuna delle rette date), o non vi è alcuna conica che soddisfaccia a queste condizioni.

Di sei raggi  $aa' . bb' . cc'$  accoppiati in involuzione, se cinque sono dati, il sesto è individuato (N° 102). Perciò se nella fig. 107<sup>a</sup> supponiamo data la conica e variabile il quadrilatero, in modo che i raggi  $a a'b$  siano fissi, anche il raggio  $b'$  resterà invariabile; dunque:

Se un quadrilatero, senza mai cessare d'essere circoscritto ad una conica, si deforma in modo che tre de' suoi vertici corrano su tre rette fisse uscenti da uno stesso punto, anche il quarto vertice si muoverà sopra una retta fissa uscente da quel punto.

*a)* Lo stesso teorema (a sinistra) ha luogo per un poligono qualunque inscritto, di un numero pari di lati. Sia il poligono inscritto di  $2n$  lati, e si deformi per modo che i suoi primi  $2n-1$  lati passino ordinatamente per altrettanti punti fissi d'una retta  $s$  (fig. 108<sup>a</sup>). Dal 1° vertice conducansi le diagonali al 4° vertice, al 6°, all'8°, ..., all'antipenultimo, onde il poligono riuscirà diviso in  $n-1$  quadrangoli semplici. Nel primo di questi quadrangoli, i primi tre lati (primi tre lati del poligono) passano per tre punti fissi di  $s$ , dunque anche il quarto lato (1<sup>a</sup> diagonale del poligono) passerà per un punto fisso di  $s$ . Nel secondo quadrangolo, i primi tre lati (la 1<sup>a</sup> diagonale e i lati 4° e 5° del poligono) passano per tre punti fissi di  $s$ , dunque anche il quarto lato (2<sup>a</sup> diagonale del poligono) passerà per un punto fisso di  $s$ . Continuando in questo modo si giungerà all'ultimo quadrangolo e si troverà che il quarto lato di questo quadrangolo, ossia il  $2n$ -esimo lato del poligono, passa anch'esso per un punto fisso di  $s$ . Dunque:

Se un poligono d'ordine pari  $2n$ , senza cessar mai

d'essere inscritto in una conica data, si deforma per modo che i suoi lati, meno uno, passino per altrettanti punti fissi in linea retta, anche l'ultimo lato passerà per un punto fisso della medesima retta (1).

b) Se dal punto fisso intorno al quale gira l'ultimo lato si possono condurre tangenti alla conica, e ciascuna di esse si prenda come posizione dell'ultimo lato, i due vertici situati in questo lato riusciranno coincidenti, cioè il poligono non avrà più che  $2n-1$  vertici. Il punto di contatto di ciascuna delle due tangenti sarà dunque il vertice di un poligono d'ordine  $2n-1$  inscritto nella conica, i cui lati passano per i  $2n-1$  punti dati.

c) Il giovane studioso potrà per esercizio dimostrare il teorema correlativo:

Se un poligono d'ordine pari  $2n$ , senza mai cessare d'essere circoscritto ad una conica data, si deforma in modo che i suoi vertici, meno uno, corrano su altrettanti raggi fissi uscenti da uno stesso centro, anche l'ultimo vertice si muoverà sopra un raggio fisso uscente da quel centro (fig. 109<sup>a</sup>).

d) Se quest'ultimo raggio sega la conica in due punti, e in ciascuno di questi si conduca la tangente, questa sarà il lato di un poligono d'ordine  $2n-1$  circoscritto alla conica, ed avente i suoi vertici nelle  $2n-1$  rette date.

**147.** Supponiamo i punti  $S, T$  infinitamente vicini sulla conica (fig. 110<sup>a</sup>), ossia la retta  $ST$  tangente in  $S$ ; il quadrangolo  $QRST$  diviene allora un triangolo inscritto  $QRS$ , e dal teorema di DESARGUES si ha:

Se un triangolo  $QRS$  è inscritto in una conica, e se una trasversale  $s$  incontra la curva in due punti  $PP'$ , due lati del triangolo nei punti  $AA'$ , il terzo lato e la tangente nel vertice opposto nei punti  $BB'$ , queste tre coppie di punti sono in involuzione.

Suppongansi le tangenti  $s, t$  infinitamente vicine (fig. 111<sup>a</sup>), ossia la  $s$  tocchi la conica nel punto  $st$ ; il quadrilatero  $qrst$  diviene un triangolo circoscritto  $qrs$ , e dal teorema del N° 144 (a destra) si ha:

Se un triangolo  $qrs$  è circoscritto ad una conica, e se da un punto  $S$  si tirano alla conica le tangenti  $pp'$ , a due vertici del triangolo le rette  $aa'$ , al terzo vertice ed al punto di contatto del lato opposto le rette  $bb'$ , queste tre coppie di rette sono in involuzione.

(1) PONCELET, l. c., N° 513.



**148.** Di qui si cava una costruzione della tangente in  $S$  alla conica della quale sono dati i cinque punti  $PPQRS$ . Infatti, siano  $A, A', B$  i punti in cui la retta  $PP'$  incontra le  $QS, RS, QR$ ; si costruisca ( $N^{\circ} 102$ ) il punto  $B'$  conjugato di  $B$  nell'involuzione determinata dalle due coppie  $AA', PP'$ ; sarà  $B'S$  la tangente domandata.

**149.** Suppongansi ora (fig. 112<sup>a</sup>; anche i punti  $Q, R$  infinitamente vicini sulla conica, cioè sia  $QR$  tangente in  $Q$ ; sicchè in luogo dei lati del quadrangolo inscritto  $QRST$  si avranno le due tangenti nei punti  $Q, S$  e la corda di contatto  $QS$  (\*). Siccome le rette  $QT, RS$  ora coincidono in una sola retta  $QS$ , anche i punti  $A, A'$  coincideranno in un punto unico, che sarà per conseguenza uno degli elementi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $PP', BB'$ . Il teorema di DESARGUES dà pertanto:

Se una trasversale sega una conica in due punti  $PP'$ , due tangenti di essa in due altri punti  $BB'$ , e la corda di contatto in  $A$ , questo sarà un punto doppio dell'involuzione determinata dalle coppie  $PP', BB'$ . Ossia:

Se una conica variabile tocca due rette date e passa per due punti dati  $PP'$ , la corda di contatto passa per un punto fisso della retta  $PP'$ .

Se, oltre alla conica, variano anche le tangenti  $QU, SU$ , restando fissi i punti  $PP', BB'$ , la corda di contatto passerà ancora per l'uno o per l'altro

Di qui si cava una costruzione del punto di contatto della tangente  $s$  colla conica della quale siano date le tangenti  $pp', qrs$ . Infatti, siano  $a, a', b$  i raggi che dal punto  $pp'$  proiettano i punti  $qs, rs, qr$ ; si costruisca ( $N^{\circ} 102$ ) il raggio  $b'$  conjugato di  $b$  nell'involuzione determinata dalle due coppie  $aa', pp'$ ; sarà  $b's$  il punto di contatto che si cercava.

Suppongansi ora anche le tangenti  $q, r$  infinitamente vicine, cioè sia  $q$  tangente alla conica nel punto  $qr$ ; allora in luogo dei vertici del quadrilatero circoscritto  $qrst$ , si avranno i punti di contatto di due tangenti  $q, s$  e il punto  $qs$  ove queste concorrono (fig. 113<sup>a</sup>). Siccome i punti  $qt, rs$  ora coincidono in un punto unico  $qs$ , anche i raggi  $a, a'$  coincideranno in un raggio unico, che sarà per conseguenza uno degli elementi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $pp', bb'$ . Dal teorema del  $N^{\circ} 144$  (a destra) abbiamo così:

Se da un punto  $S$  si tirano le tangenti  $pp'$  ad una conica, e si proiettano due punti della medesima e il punto comune alle tangenti in essi punti mediante i raggi  $bb', a$ , sarà  $a$  un raggio doppio dell'involuzione determinata dalle coppie  $pp', bb'$ .

Se una conica variabile tocca due rette date  $pp'$  e passa per due punti dati, le tangenti in questi punti concorreranno sopra una retta fissa, passante pel punto  $pp'$ .

Se, oltre alla conica, variano anche i punti di contatto delle  $q, s$ , restando fisse le rette  $pp', bb'$ , il punto di concorso  $qs$  cadrà ancora nell'uno

(\*) Cioè la retta che unisce i punti di contatto delle due tangenti.

dei punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $PP' \cdot BB'$ . Dunque, dati quattro punti  $PP'BB'$  in linea retta, descritta ad arbitrio una conica per  $PP'$ , e condotte ad essa le tangenti da  $B$  e da  $B'$ ; se ciascuna tangente da  $B$  si combina con ciascuna tangente da  $B'$ , si avranno quattro corde di contatto, che a due a due concorreranno nei punti doppi dell'involuzione  $PP' \cdot BB'$  (1).

**150.** Di qui si ha una costruzione della tangente in  $S$  alla conica individuata da quattro punti  $PP'QS$  e dalla tangente in  $Q$  (fig. 112<sup>a</sup>). Infatti, siano  $A, B$  i punti in cui  $PP'$  incontra  $QS$  e la tangente data; e si costruisca il punto  $B'$  conjugato di  $B$  nell'involuzione determinata dalla coppia  $PP'$  e dal punto doppio  $A$ . Sarà  $SB'$  la tangente che si cerca.

o nell'altro de' raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $pp' \cdot bb'$ . Dunque, dati quattro raggi  $pp'bb'$  di un fascio, descritta ad arbitrio una conica tangente a  $p$  e  $p'$ , e condotte ad essa le tangenti ne' punti in cui la segano le rette  $b, b'$ ; se si combina ogni tangente relativa a  $b$  con ciascuna tangente relativa a  $b'$ , si hanno quattro punti di concorso, che a due a due si troveranno ne' raggi doppi dell'involuzione  $pp' \cdot bb'$ .

Di qui si ha una costruzione del punto di contatto della tangente  $s$  alla conica individuata da quattro tangenti  $pp'qs$  e dal punto di contatto di  $q$  (fig. 113<sup>a</sup>). Infatti, siano  $a, b$  i raggi che dal punto  $pp'$  proiettano rispettivamente il punto  $qs$  e il punto di contatto dato; e si costruisca il raggio  $b'$  conjugato di  $b$  nell'involuzione determinata dalla coppia  $pp'$  e dal raggio doppio  $a$ . Sarà  $sb'$  il punto cercato.

**151.** Nel teorema che precede (N° 149) suppongasi che la conica sia una iperbole (fig. 114<sup>a</sup>); le tangenti date siano gli assintoti, onde la corda  $QR$  sarà tutta all'infinito.

L'involuzione ( $PP' \cdot BB' \dots$ ) ha dunque un punto doppio  $A$  all'infinito; ne segue (N° 51) che l'altro elemento doppio è il punto di mezzo comune ai segmenti  $PP', BB', \dots$ . Dunque:

Se con una stessa trasversale si tagliano un'iperbole e i suoi due assintoti, il segmento intercetto dalla curva e il segmento intercetto dagli assintoti hanno lo stesso punto di mezzo.

Dall'avere i segmenti  $PP', BB'$  lo stesso punto di mezzo segue che

$$PB = B'P' \text{ e } PB' = BP' \text{ (2).}$$

Di qui una regola per costruire l'iperbole della quale siano dati gli assintoti e un punto (3).

(1) BRIANCHON, *l. c.*, p. 20, 24.

(2) APOLLONIO, *l. c.*, II, 8, 46.

(3) APOLLONIO, *l. c.*, II, 4.

**152.** Nel teorema del N° 149 supponendosi i punti  $PP'$  infinitamente vicini (fig. 115'), cioè sia la trasversale tangente alla conica; il punto di contatto  $P$  sarà l'altro punto doppio dell'involuzione determinata dalla coppia  $BB'$  e dal punto doppio  $A$ ; dunque i quattro punti  $PABB'$  sono armonici (N° 96, a). Ossia:

In un triangolo circoscritto ( $UBB'$ ) ciascun lato ( $BB'$ ) è diviso armonicamente dal suo punto di contatto ( $P$ ) e dalla retta che unisce i punti di contatto ( $Q, S$ ) degli altri due.

a) Dal punto  $A$  parte un'altra tangente, il cui punto di contatto sia  $O$ . I punti armonici  $PABB'$  sono il punto di contatto della tangente  $AB$  e quelli in cui questa sega le altre tre tangenti  $OA, QB, SB'$ ; dunque (N° 113, b) le quattro tangenti  $AB, OA, QB, SB'$  saranno incontrate da qualunque altra tangente in quattro punti armonici; vale a dire, esse sono quattro tangenti armoniche (N° 111). E siccome la retta  $QS$ , che unisce i punti di contatto delle tangenti conjugate  $QB, SB'$  passa pel punto  $A$ , così:

Se la corda di contatto di due tangenti passa pel punto di concorso di due altre tangenti, le prime due tangenti sono separate armonicamente mediante le altre due.

b) E viceversa:

Se quattro tangenti di una conica sono armoniche, la corda di contatto di due conjugate passa pel punto comune alle altre due.

Nel teorema del N° 149 supponendosi le tangenti  $pp'$  infinitamente vicine (fig. 116'), cioè il punto  $S$  sia preso sulla conica; la tangente in  $S$  sarà l'altro raggio doppio dell'involuzione determinata dalla coppia  $bb'$  e dal raggio doppio  $a$ ; dunque: i quattro raggi  $pabb'$  sono armonici (N° 96, a). Ossia:

In un triangolo inscritto ( $ubb'$ ) ogni angolo ( $bb'$ ) è diviso armonicamente mediante la tangente ( $p$ ) nel vertice e la retta che va al punto di concorso delle tangenti ( $q, s$ ) negli altri due vertici.

La retta  $a$  incontra la conica in un altro punto, la cui tangente sia  $o$ . Le rette armoniche  $pabb'$  sono la tangente in  $S$  e le congiungenti di  $S$  a tre altri punti della conica (punti di contatto delle  $o, q, s$ ); dunque (N° 113, a), questi quattro punti saranno proiettati da qualunque altro punto della conica mediante quattro raggi armonici; vale a dire, essi sono quattro punti armonici della conica (N° 109). E siccome il punto di concorso delle  $q, s$  è nella corda di contatto delle  $p, o$ , così:

Se il punto di concorso delle tangenti in due punti è situato nella retta che congiunge due altri punti, i primi due punti sono separati armonicamente mediante gli altri due.

E viceversa:

Se quattro punti di una conica sono armonici, il punto di concorso delle tangenti in due punti conjugati giace nella retta che congiunge gli altri due.

**153.** Questi due enunciati correlativi si possono fondere in un solo e me-

desimo teorema, in virtù della proprietà già veduta altrove (N° 112 e 113, c) che se quattro punti di una conica sono armonici, le quattro tangenti in essi sono armoniche e viceversa. E allora potremo dire:

Se due tangenti di una conica concorrono in un punto della corda di contatto di due altre tangenti, viceversa il punto di concorso di queste sarà nella corda di contatto delle prime due; e le quattro tangenti (del pari che i loro punti di contatto) costituiscono un gruppo armonico (1).

Nella fig. 115\*, come  $QS$  passa per  $A$ , così  $OP$  passa per  $U$ , punto comune alle  $QB, SB'$ ; e come sono armoniche le quattro rette  $U(Q.S.P.A)$ , così sono tali le  $A(O.P.Q.U)$ .

Nella fig. 116\*, come il punto  $qs$  è in  $a$ , così il punto  $op$  è nella  $u$  che congiunge i contatti delle  $q, s$ ; e come sono armonici i quattro punti  $u(q.s.p.a)$ , così sono tali i quattro punti  $a(o.p.q.u)$ .

**154. Esempio.** — La conica sia un'iperbole (fig. 117\*); gli assintoti sono due tangenti, la cui corda di contatto  $QS$  è la retta all'infinito. Perciò due tangenti parallele avranno i loro punti di contatto in linea retta col punto di concorso  $U$  degli assintoti; e viceversa se pel punto  $U$  si conduce una trasversale a segare la curva in due punti  $P, O$ , le tangenti in questi punti sono parallele. I due punti di contatto  $P, O$  hanno il loro punto di mezzo nel punto  $U$ , perchè in generale (fig. 115\*) il gruppo  $UVPO$  è armonico, e nel caso attuale  $V$  è all'infinito.

Una tangente qualunque sega gli assintoti in due punti  $BB'$  separati armonicamente dal punto di contatto  $P$  e dalla corda di contatto, che è la retta all'infinito; dunque  $P$  è il punto di mezzo fra  $B$  e  $B'$ ; ossia

La porzione di una tangente dell'iperbole intercetta fra gli assintoti è divisa per metà dal punto di contatto (2).

Questa proposizione è un caso particolare di quella enunciata al N° 151.

**155.** Siccome in virtù del teorema di DESANGUES (N° 143) le coppie di punti  $PP', AA', BB'$  (fig. 106\*) sono in involuzione, così ha luogo l'uguaglianza di rapporti anarmonici  $(PPAB) = (PPA'B)$ , ossia

$$\frac{PA}{PA'} : \frac{PB}{PB'} = \frac{PB'}{PB} : \frac{PA'}{PA}.$$

Ma  $PA : PA'$  è uguale al rapporto delle distanze (prese in una direzione fissata ad arbitrio) de' punti  $P, P'$  della retta  $QT$ ; e un significato analogo hanno gli altri rapporti contenuti nella suesposta equazione; sicchè questa potrà scriversi così:

$$\frac{(A)}{(A')} : \frac{(B)}{(B')} = \frac{(B')}{(B)} : \frac{(A')}{(A)},$$

(1) DELAHIRE, I. c., lib. I, 30. — STEINER, I. c., p. 439.

(2) APOLLONIO, I. c., II, 3, 9.

ossia

$$\frac{(A) \cdot (A')}{(B) \cdot (B')} = \frac{(A') \cdot (A)}{(B') \cdot (B)},$$

dove  $(A)$ ,  $(A')$ ,  $(B)$ ,  $(B')$  siano le distanze (perpendicolari od oblique sotto angoli dati) del punto  $P$  dai lati  $QT$ ,  $RS$ ,  $QR$ ,  $TS$  del quadrangolo inscritto  $QRST$ ; ed  $(A')$ ,  $(A'')$ ,  $(B')$ ,  $(B'')$  siano le distanze (sotto angoli risp. uguali ai primi) del punto  $P'$  dai lati medesimi. L'equazione precedente dice adunque che il rapporto

$$\frac{(A) \cdot (A')}{(B) \cdot (B')}$$

è una quantità costante, qualunque sia il punto  $P$  della conica; ossia:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della curva da due lati opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati opposti (\*).

**156.** Così pure, si può mettere sotto una forma analoga il teorema correlativo a quello di DESARGUES (N° 143, § destra). S'indichino con  $R$ ,  $T$ ,  $T_1$ ,  $R_1$  i vertici  $qr$ ,  $qt$ ,  $st$ ,  $sr$  del quadrilatero circoscritto  $qrst$  (fig. 107<sup>a</sup>); con  $P$ ,  $P'$  le intersezioni delle tangenti  $pp'$  col lato  $q$ ; e con  $P_1$ ,  $P_1'$  quelle delle stesse tangenti col lato opposto  $s$ . In virtù del teorema N° 143, b), sono uguali i rapporti anarmonici  $(RTPP')$ ,  $(R_1T_1P_1P_1')$ , cioè si ha

$$\frac{RP}{TP} : \frac{RP'}{TP'} = \frac{R_1P_1}{T_1P_1} : \frac{R_1P_1'}{T_1P_1'},$$

ossia

$$\frac{RP \cdot T_1P_1}{TP \cdot R_1P_1} = \frac{RP' \cdot T_1P_1'}{TP' \cdot R_1P_1'}.$$

Ma  $RP : TP$  è uguale al rapporto delle distanze (prese in una stessa direzione, del resto arbitraria) dei punti  $R$ ,  $T$  dalla retta  $p$ ; ed analogamente  $T_1P_1 : R_1P_1$  è uguale al rapporto delle distanze dei punti  $T_1$ ,  $R_1$  dalla medesima retta  $p$ . L'uguaglianza suesposta esprime adunque che la quantità

$$\frac{RP \cdot T_1P_1}{TP \cdot R_1P_1}$$

è costante, qualunque sia la tangente  $p$ . Ossia:

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il prodotto delle distanze d'una tangente qualunque da due vertici opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze della tangente medesima dagli altri due vertici (\*\*).

(\*) Questa proposizione da CHASLES è denominata *teorema di PAPP*, perchè risponde al celebre problema *ad quatuor lineas* di quest'antico geometra: cfr. *Aperçu historique*, p. 37 e 338.

(\*\*) CHASLES, *Sect. coniques*, N° 26.

## § 18. Elementi uniti, ed elementi doppi.

**157.** Abbiansi due fasci proiettivi di raggi, concentrici o no, e pel loro centro comune o pei loro centri  $O, O'$  s'imagini descritta una conica (o un cerchio), che seghi i raggi del primo fascio in  $A, B, C, \dots$  ed i raggi del secondo in  $A', B', C', \dots$ . Queste due serie di punti s'imaginino proiettate da due nuovi punti  $O_1, O_1'$  (o da uno stesso punto) della conica; i due fasci proiettanti  $O_1(ABC\dots), O_1'(A'B'C'\dots)$  saranno (N° 113, a) rispettivamente proiettivi ai due fasci dati  $O(ABC\dots), O'(A'B'C'\dots)$ , epperò proiettivi fra loro.

Le due serie di punti  $ABC\dots, A'B'C'\dots$  si diranno proiettive <sup>(1)</sup>.

a) Proiettinsi ora queste due serie (fig. 118<sup>a</sup>) da due punti corrispondenti delle medesime, per es.  $A', A$ . I fasci proiettanti

$$A'(A, B, C, \dots), A(A', B', C' \dots)$$

saranno proiettivi; anzi prospettivi, a cagione del raggio unito  $AA'$ . Dunque (N° 62, b) le coppie di raggi corrispondenti si segheranno sopra una retta fissa, ossia i punti comuni alle coppie di retto  $AB'$  e  $A'B, AC'$  e  $A'C, AD'$  e  $A'D, \dots$  saranno in una sola e medesima retta  $s$ . Un punto qualunque di questa retta  $s$ , congiunto ad  $A', A$ , darà due rette che segheranno di nuovo la conica in due punti corrispondenti delle serie  $ABCD\dots, A'B'C'D'\dots$ .

Si giungerebbe alla medesima retta  $s$ , se invece di  $A', A$  si adoperassero come centri di proiezione due altri punti corrispondenti, per es.  $B', B$ . Infatti, dal teorema di PASCAL si ha che, essendo  $AB'CA'BC'$  un esagono inscritto, il punto comune alle  $BC, BC'$  è nella retta che passa pel punto comune alle  $A'B, AB'$ , e pel punto comune alle  $A'C, AC'$  (N° 117, a destra).

b) Ogni punto  $M$ , comune alla conica ed alla retta  $s$  è un punto unito delle due serie  $ABC\dots, A'B'C'\dots$ . Infatti, le rette  $MA', MA$  incontrano di nuovo la conica in uno stesso punto  $M$ , cioè in  $M$  sono riuniti due punti corrispondenti delle due serie proiettive. Segno da ciò che le due serie avranno due punti uniti, uno solo,

<sup>(1)</sup> STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856-57-60), N° 7. — REYE, *l. c.*, 1, p. 102 e seg.

o nessuno, secondochè la retta  $s$  segna la conica in due punti (fig. 119<sup>a</sup>,  $a$ ), o la tocchi in un punto (fig. 119<sup>a</sup>,  $b$ ), o non abbia con essa alcun punto comune (fig. 119<sup>a</sup>,  $c$ ).

$c$ ) Dalle cose premesse si raccoglie che due serie projective di punti in una conica sono individuate da tre coppie di punti corrispondenti ( $A, A'$ ), ( $B, B'$ ), ( $C, C'$ ). Per trovare altre coppie di punti corrispondenti e per ottenere i punti uniti, se esistono, basta costruire la retta  $s$  che passa per tre punti di concorso delle coppie di lati opposti dell'esagono inscritto  $AB'CA'BC'$  (fig. 85<sup>a</sup>, 118<sup>a</sup> e 119<sup>a</sup>). I punti uniti sono quelli che  $s$  ha comuni colla conica; e due punti corrispondenti qualunque  $D, D'$  sono tali che le rette  $A'D$  e  $AD'$  (ovvero  $B'D$  e  $BD'$ , ovvero  $C'D$  e  $CD'$ ) si seghino su  $s$  (1).

**158.** In luogo di serie projective di punti in una conica, si possono anche considerare serie projective di tangenti. Se  $o, o'$  sono due rette (distinte o sovrapposte) punteggiate projective, descrivasi una conica che tocchi  $o$  ed  $o'$ ; e da ogni coppia di punti corrispondenti  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  ed  $B'$ ,  $C$  ed  $C'$ , ... si conducano alla conica le tangenti  $a$  ed  $a'$ ,  $b$  ed  $b'$ ,  $c$  ed  $c'$  .... Se ora si segano queste due serie di tangenti  $abc \dots, a'b'c' \dots$  risp. con due altre tangenti  $o_1, o'_1$ , si otterranno due nuove punteggiate risp. projective alle date (N° 113,  $b$ ), epperò projective fra loro.

Le due serie  $abc \dots, a'b'c' \dots$  di tangenti di una conica, dotate della proprietà d'essere segate da qualsiasi altra tangente della curva medesima in punti costituenti due punteggiate projective, diconsi projective.

$a$ ) Suppongasi la prima serie segata colla retta  $a'$ , la seconda colla retta  $a$ . Le punteggiate projective che ne risultano sono prospettive, a cagione del punto unito  $aa'$ ; dunque le altre coppie di punti corrispondenti  $a'b$  ed  $ab'$ ,  $a'c$  ed  $ac'$ , ... sono in linea retta con un punto fisso  $S$ . Questo punto non cambia se si adoperano come trasversali due altre tangenti  $b'$  e  $b$ ; infatti, essendo  $ab'ca'bc'$  un esagono circoscritto, le rette che uniscono le coppie di vertici opposti  $a'b$  ed  $ab'$ ,  $a'c$  ed  $ac'$ ,  $b'c$  e  $bc'$  concorrono in uno stesso punto, in virtù del teorema di BRIANCHON (N° 117, a sinistra).

$b$ ) Se per  $S$  si possono condurre tangenti alla conica, ciascuna di esse è un raggio unito delle due serie projective  $abc \dots, a'b'c' \dots$ .

$c$ ) Due serie projective  $abc \dots, a'b'c'$  di tangenti di una conica sono individuate da tre coppie di rette corrispondenti ( $a, a'$ ), ( $b, b'$ ), ( $c, c'$ ). Per trovare altre coppie di rette corrispondenti e per ottenere le rette unite, se esistono, basta costruire il punto  $S$  comune alle diagonali che congiungono le coppie di vertici opposti dell'esagono circoscritto  $ab'ca'bc'$ . Le rette unite sono

(1) STEINER, *l. c.*, p. 174.

le tangenti per  $S$ ; e due rette corrispondenti qualunque  $d, d'$  sono tali che i punti  $a'd, ad'$  (ovvero  $b'd$  e  $bd'$ , ovvero  $c'd$  e  $cd'$ ) siano in linea retta con  $S$ .

d) Una serie di punti  $ABC \dots$  di una conica ed una serie di tangenti  $abc \dots$  della stessa conica diconsi proiettive, se il fascio di raggi che proiettano  $ABC \dots$  da un punto qualunque della conica è proiettivo alla punteggiata che le rette  $abc \dots$  segnano sopra una tangente qualunque della conica medesima.

Una serie di punti  $ABC \dots$  o di tangenti  $abc \dots$  di una conica dicesi proiettiva ad una punteggiata o ad un fascio, se la punteggiata o il fascio è proiettivo al fascio di raggi che proiettano  $ABC \dots$  da un punto qualunque della conica o alla punteggiata che dalle  $abc \dots$  è segnata sopra una tangente qualunque della conica medesima.

e) Premesse queste definizioni, se colla denominazione di forma di 1<sup>a</sup> specie, oltre alle punteggiate ed ai fasci, si abbracciano le serie di punti o di tangenti di una conica (<sup>1</sup>), si può ora enunciare la proposizione: due forme di 1<sup>a</sup> specie, proiettive ad una terza (della stessa specie), sono proiettive tra loro (cfr. N° 35).

f) Dalle definizioni medesime segue ora che il teorema del N° 113, c) si può enunciare nel seguente modo:

Una serie qualunque di tangenti di una conica è proiettiva alla serie dei punti di contatto.

g) Siano dunque  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  due serie proiettive di punti della conica; ed  $abc \dots, a'b'c' \dots$  le tangenti risp. in quei punti. Le serie  $abc \dots, a'b'c' \dots$  di tangenti saranno risp. proiettive alle serie dei punti di contatto  $ABC \dots, A'B'C' \dots$ ; epperò proiettive fra loro. Sia  $s$  la retta nella quale si segano le coppie di rette analoghe alle  $AB'$  ed  $A'B$ ,  $AC'$  ed  $A'C$ ,  $BC'$  e  $B'C$ , ...; ed  $S$  il punto col quale sono allineate le coppie di punti analoghe ad  $ab'$  ed  $a'b$ ,  $ac'$  ed  $a'c$ ,  $bc'$  e  $b'c$ , .... Se  $s$  sega la conica in due punti  $M, N$ , questi saranno i punti uniti delle serie  $ABC \dots, A'B'C' \dots$ ; le tangenti  $m, n$  in  $M, N$  saranno perciò i raggi uniti delle serie  $abc \dots, a'b'c' \dots$ ; dunque le  $m, n$  concorreranno in  $S$ .

h) Da tutto ciò si raccoglie che alla considerazione di una serie di tangenti si può sostituire quella dei punti di contatto, o viceversa.

**159.** Invece di due fasci proiettivi e del resto qualisivogliano, come nel N° 157, consideriamo un'involuzione di raggi uscenti da un punto  $O$ , i quali siano segati da una conica descritta per  $O$  nelle coppie di punti  $AA', BB', CC', \dots$ . Proiettinsi ora questi da un altro punto qualunque  $O_1$  della conica; come sono per ipotesi

(<sup>1</sup>) Coll'introduzione di queste nuove forme di 1<sup>a</sup> specie, alle operazioni del segare con una retta e del proiettare mediante raggi uscenti da un punto, se ne aggiungono due altre: quella di segare un fascio di raggi con una conica passante pel centro del fascio, e quella di proiettare una retta punteggiata mediante le tangenti di una conica toccata dalla retta data.



(N° 93, 94) proiettivi i fasci  $O(A.A'.B.C\dots)$ ,  $O(A'.A.B'.C\dots)$ , così saranno (N° 113, a) pur proiettivi i fasci  $O_1(A.A'.B.C\dots)$ ,  $O_1(A'.A.B'.C'\dots)$ ; cioè anche i raggi proiettanti da  $O_1$  saranno accoppiati in involuzione. In questo caso si dice che le due serie proiettive di punti  $ABC\dots$ ,  $A'B'C'\dots$  della conica costituiscono un'involuzione, ossia che si ha nella conica un'involuzione formata dalle coppie di punti coniugati  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... (1).


a) Così pure, se si ha un'involuzione di punti in una retta  $o$ , e dalle coppie di punti coniugati si conducano ad una conica toccata da  $o$  le coppie di tangenti  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ... queste saranno segate da qualunque altra tangente in punti costituenti un'involuzione; epperò si dirà che  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ... è un'involuzione di tangenti della conica (cfr. N° 158).

b) Se più coppie di tangenti  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ... di una conica formano un'involuzione, anche i loro punti di contatto  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... saranno in involuzione, e viceversa (N° 158, f).

**160.** De' sei punti arbitrari  $ABCA'B'C'$  considerati nel N° 157, c), prendasi  $C'$  infinitamente vicino ad  $A$ , e  $C$  infinitamente vicino ad  $A'$ . Allora le serie proiettive  $(ABA'\dots)$ ,  $(A'B'A\dots)$  formano l'involuzione  $(AA'.BB'\dots)$ , e l'esagono inscritto  $AB'CA'BC'$  si muta nella figura costituita dal quadrangolo inscritto  $ABA'B'$ , e dalle tangenti ne' vertici opposti  $A, A'$  (fig. 101\*, 120\*). Dunque:

Due coppie di punti  $(AA')$ ,  $(BB')$  di una conica individuano in essa un'involuzione.

a) Per trovare altre coppie di punti coniugati ed i punti doppi, basta costruire la retta  $s$  che congiunge il punto comune alle  $AB'$ ,  $A'B$ , col punto comune alle  $AB$ ,  $A'B'$ , vale a dire la retta che unisce i punti d'incontro delle coppie di lati opposti del quadrangolo inscritto  $AB'AB$ . I punti comuni ad  $s$  ed alla conica sono i punti doppi. Due punti coniugati  $C, C'$  sono tali che le rette  $AC$ ,  $A'C'$  (ovvero le  $AC'$ ,  $A'C$ , ovvero le  $BC$ ,  $B'C'$ , ovvero le  $B'C$ ,  $BC'$ ) si segano sulla  $s$ .

b) Anche le tangenti in due punti coniugati, come  $AA'$ ,  $BB'$ , ... si segano sempre sulla  $s$  (N° 129). 

c) Siccome le coppie di rette  $BC$  e  $B'C'$ ,  $CA$  e  $C'A'$ ,  $AB$  e  $A'B'$  si segano in tre punti di una stessa retta  $s$ , così i trian-

(1) STAUDT, *Beiträge*, N° 70 e seg.

goli <sup>(1)</sup>  $ABC, A'B'C'$  sono omologici (N° 13); dunque le rette  $AA', BB', CC'$  concorrono in uno stesso punto  $S$ . A determinare questo punto bastano le  $AA', BB'$ ; dunque:

Due punti coniugati qualunque dell'involuzione sono in linea retta con un punto fisso  $S$ .

O altrimenti:

Ogni retta per  $S$ , la quale seghi la conica, dà due punti coniugati dell'involuzione.

d) Si è veduto che, se  $s$  ha comuni colla conica due punti  $M, N$ , questi sono i punti doppi dell'involuzione. Dunque le tangenti in  $M, N$  concorreranno in  $S$ .

e) Viceversa, le coppie de' punti in cui una conica è segata dai raggi di un fascio, il centro  $S$  del quale non sia un punto della curva, costituiscono un'involuzione. Infatti, se  $(AA'), (BB')$  sono i punti d'intersezione della conica con due raggi, le due coppie  $AA', BB'$  individuano un'involuzione, nella quale due punti coniugati sono sempre in linea retta con un punto fisso, cioè con  $S$ . Se l'involuzione ha punti doppi, essi saranno le intersezioni della conica colla retta  $s$  che contiene il punto comune alle  $AB, A'B'$ , ed il punto comune alle  $AB', A'B$ .

f) Se dai vari punti di una retta  $s$  si conducono alla conica le coppie di tangenti  $aa', bb', cc', \dots$ , queste formano un'involuzione. Infatti, siano  $AA', BB', CC'$  i punti di contatto delle rette  $aa', bb', cc'$ , ed  $S$  il punto ove concorrono le corde  $AA', BB'$ ; nell'involuzione determinata dalle coppie  $AA', BB'$ , due altri punti coniugati qualunque saranno allineati con  $S$ . Il punto  $C$  e il suo coniugato sono dunque in una retta passante per  $S$ ; e le tangenti in questi punti devono concorrere sulla retta colla quale concorrono  $aa'$  e  $bb'$ , cioè su  $s$ ; dunque il punto coniugato di  $C$  è  $C'$ . Vale a dire:  $AA' \cdot BB' \cdot CC'$  sono coppie di punti in involuzione, epperò  $aa' \cdot bb' \cdot cc'$  sono coppie di tangenti in involuzione (N° 159, b).

g) Se  $M, N$  sono i punti doppi di un'involuzione  $AA' \cdot BB' \dots$  di punti d'una conica, s'è già veduto (a), che  $AB, A'B', MN$  sono tre rette concorrenti in un punto (come pure  $A'B, AB', MN$ ). Dunque, pel teorema e), si ha:

Se  $AA' \cdot BB'$  sono due coppie di elementi coniugati ed  $MN$  gli elementi doppi d'un'involuzione, saranno  $MN \cdot AB \cdot A'B'$  (e così pure  $MN \cdot AB' \cdot A'B$ ) tre coppie di elementi coniugati in una nuova involuzione.

h) La retta  $s$  sega la conica, se il punto  $S$  è esterno (fig. 120\*, a), cioè se delle due coppie  $AA', BB'$  l'una è tutta interna o tutta

<sup>(1)</sup> Così pure sono omologici  $A'BC$  ed  $AB'C'$ ,  $AB'C$  ed  $A'BC'$ ,  $ABC'$  ed  $A'B'C$ .

esterna all'altra; invece se l'una delle coppie è separata mediante l'altra, il punto  $S$  riesce interno, e la retta  $s$  tutta esterna alla conica (fig. 120<sup>a</sup>,  $b$ ). Dunque ritroviamo di nuovo la proprietà (N° 98):

Un'involuzione ha due elementi doppi, se di due coppie di elementi conjugati, l'una è tutta interna o tutta esterna all'altra. Un'involuzione non ha elementi doppi, se di due coppie d'elementi conjugati, l'una è separata mediante l'altra.

Non può accadere mai che un'involuzione propriamente detta abbia un solo elemento doppio. Infatti, se  $s$  fosse tangente alla conica,  $S$  sarebbe il punto di contatto, e in ciascuna coppia di punti conjugati, uno coinciderebbe sempre con  $S$  (cfr. N° 96,  $c$ ).

**161.** Se  $(MNAB...)$ ,  $(MNA'B')$  sono due serie projective di punti in una conica, i punti uniti saranno  $M$  ed  $N$ , e la retta  $MN$  conterrà il punto comune alle  $AB$ ,  $A'B$  (N° 157,  $b$ ). Suppongasì ora che, se il punto  $B'$  s'accosta infinitamente ad  $A$ , anche  $B$  ed  $A'$  divengano infinitamente prossimi, sicchè le posizioni limiti delle rette  $AB'$ ,  $A'B$  siano le tangenti in  $A$ ,  $A'$  (fig. 121<sup>a</sup>). Ma se  $MNAA'$ ,  $MNA'A$  sono gruppi corrispondenti in due serie projective, ciò vuol dire che, proiettando questi punti da un punto  $O$  fissato arbitrariamente sulla conica, i due gruppi di raggi proiettanti  $mnaa'$ ,  $mna'a$  sono projectivi; cioè che il gruppo  $mnaa'$  è armonico (N° 65). Avremo dunque il teorema (già ottenuto al N° 152):

Se quattro punti  $MNAA'$  di una conica sono armonici, le tangenti in due punti conjugati, per es.  $A$  e  $A'$ , concorrono sulla retta che unisce gli altri due.

Ovvero (N° 113,  $c$ ):

Se quattro tangenti di una conica sono armoniche, due conjugate si segano sulla retta che unisce i punti di contatto delle altre due.

Di qui segue che, se pel punto  $S$  comune alle tangenti in  $M$ ,  $N$ , si conducono le rette a segare la conica in  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$ ,... tutte queste coppie di punti saranno separate armonicamente mediante  $MN$ . Dunque le coppie di tangenti alla conica in  $A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ ,... concorreranno sulla  $MN$ .

O in altre parole:

Se da un punto si conducono ad una conica due tan-

genti ed una segante, i due punti di contatto e i due punti di segmento formano un gruppo armonico.

a) I punti  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$ , ... costituiscono un'involuzione, i cui punti doppi sono  $MN$  (N° 160,  $c$ ,  $d$ ). Arriviamo dunque di nuovo alla proprietà che, se l'involuzione ha due elementi doppi, questi sono separati armonicamente mediante due elementi congiunti qualunque (N° 96,  $a$ ).

b) La conica sia un circolo (fig. 122\*). Allora i triangoli simili  $SAM$ ,  $SMA'$  danno

$$AM : MA' = SM : SA',$$

e i triangoli simili  $SAN$ ,  $SNA'$

$$AN : NA' = SN : SA';$$

ma  $SM = SN$ , dunque:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{A'M}{A'N},$$

ossia

$$AM \cdot A'N = AN \cdot A'M.$$

Siccome il quadrangolo  $AMA'N$  è inscritto nel cerchio, così si ha pel noto teorema di TOLOMEO (<sup>1</sup>)

$$AA' \cdot MN = AM \cdot A'N + AN \cdot A'M,$$

dunque pel quadrangolo formato da quattro punti armonici si ha:

$$\frac{1}{2} AA' \cdot MN = AM \cdot A'N = AN \cdot A'M.$$

**162.** Le proprietà contenute nel N° 157 e ne' seguenti forniscono immediatamente la soluzione del problema:

Costruire gli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte, e gli elementi doppi di un'involuzione.

a) Sia  $O$  il centro comune di due fasci proiettivi, individuati mediante tre coppie di raggi corrispondenti (fig. 123\*). Descrivasi per  $O$  un cerchio che segli le tre coppie di raggi dati in  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$ . Trovisi il punto  $R$  comune alle rette  $AB'$ ,  $A'B$ ; e il punto  $Q$  comune alle rette  $AC'$ ,  $A'C$ . Se la retta  $QR$  sega il cerchio in due punti  $M, N$ , saranno  $OM$ ,  $ON$  i raggi uniti domandati.

b) Siano  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  tre coppie di punti corrispondenti in due punteggiate proiettive sovrapposte  $u, u'$  (fig. 124\*); e si vogliano costruire i punti uniti.

(<sup>1</sup>) BALTZER, *Planimetria*, pag. 492.

Da un punto  $O$  di una circonferenza tracciata ad arbitrio, i punti dati si proiettino sulla circonferenza in  $A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'$  (1). Trovisi il punto  $R$  comune alle rette  $A_1B_1', A_1'B_1$ , e il punto  $Q$  comune alle  $A_1C_1', A_1'C_1$  (o il punto  $P$  comune alle  $B_1C_1', B_1'C_1$ ). Se la retta  $PQR$  sega il cerchio in due punti  $M_1, N_1$ , e si proiettino  $M_1, N_1$  da  $O$  in  $M, N$  sulla retta data, saranno  $M, N$  i punti uniti domandati (2).

c) Se i due fasci in a) sono in involuzione, a individuarli bastano due coppie di raggi coniugati (fig. 125<sup>a</sup>). Col cerchio descritto per  $O$  seghinsi quei raggi in  $(A, A'), (B, B')$ ; sia  $R$  il punto comune alle  $AB', A'B$ ; e  $Q$  il punto comune alle  $AB, A'B'$ . Se la retta  $QR$  sega il cerchio in due punti  $M, N$ , saranno  $OM, ON$  i raggi doppi dell'involuzione. La retta  $QR$  non sega il cerchio quando il punto  $S$ , comune alle  $AA', BB'$ , è interno al cerchio.

d) Siano  $AA', BB'$  due coppie di punti coniugati di un'involuzione di punti in linea retta, e si domandino i punti doppi (fig. 126<sup>a</sup>).

Da un punto  $O$  di una circonferenza tracciata ad arbitrio, i punti dati vengano proiettati sulla circonferenza in  $A_1A_1', B_1B_1'$ . Sia  $R$  il punto comune alle  $A_1B_1', A_1'B_1$ ; e  $Q$  il punto comune alle  $A_1B_1, A_1'B_1'$ . Se la retta  $QR$  sega il cerchio in  $M_1, N_1$  e si proiettino questi punti da  $O$  in  $M, N$  sulla retta data, saranno  $M, N$  i punti doppi domandati.

**163.** Ritenuto il caso c) dell'involuzione, se il punto  $S$  comune alle rette  $AA', BB', \dots$  è il centro del cerchio (fig. 127<sup>a</sup>), cioè se le  $AA', BB', \dots$  sono altrettanti diametri del cerchio, ciascun raggio  $OA, OB, \dots$  sarà perpendicolare al suo coniugato: vale a dire l'involuzione sarà in questo caso costituita da tutti gli angoli retti che hanno il centro in  $O$ .

Ma se  $S$  non è il centro del cerchio, per  $S$  passerà un solo diametro, così che, detti  $C, C'$  i punti d'intersezione del cerchio con questo diametro, i raggi  $OC, OC'$  saranno perpendicolari fra loro, e saranno i soli raggi coniugati dotati di questa proprietà (fig. 128<sup>a</sup>). Ossia:

Un'involuzione di raggi o è tutta costituita da angoli retti, o contiene uno ed un solo angolo retto, i cui lati siano raggi coniugati.

**164.** Questo teorema non è che un caso particolare del seguente.

Abbiansi due distinte involuzioni di raggi tutti concorrenti in un punto  $O$ ; ed un cerchio descritto per  $O$  seghi i raggi coniugati della prima involuzione nelle coppie di punti  $(AA', BB', \dots)$  e

(1) Nella figura, ciascun punto della retta data e la sua proiezione da  $O$  sul cerchio sono indicati colla stessa lettera.

(2) STEINER, *l. c.*, p. 68 e 174.

quelli della seconda in ( $GG' . HH' \dots$ ). Sia  $S$  il punto comune alle  $AA', BB', \dots$ , e  $T$  il punto comune alle  $GG', HH', \dots$ . Se la retta  $ST$  sega il cerchio in due punti  $E, E'$ , questi saranno coniugati in entrambe le involuzioni, perchè allineati sì con  $S$ , sì con  $T$ . Cerchiamo ora in quali casi la retta  $ST$  riesca secante il cerchio.

In primo luogo, ciò avverrà se almeno uno de' punti  $S, T$  sia interno al cerchio (N° 160,  $h$ ), cioè se almeno una delle involuzioni sia priva d'elementi doppi (fig. 129°).

Se i punti  $S, T$  sono entrambi esteriori, cioè se entrambe le involuzioni posseggono elementi doppi, e questi siano  $OM, ON$  per l'una,  $OU, OV$  per l'altra, i raggi  $OE, OE'$  dovranno separare armonicamente sì la coppia  $OM, ON$ , sì la coppia  $OU, OV$ . Ma (N° 55,  $d$ ) affinchè esista una coppia d'elementi  $OE, OE'$  che formi un gruppo armonico sì colla coppia  $OM, ON$ , sì colla coppia  $OU, OV$ , è necessario e sufficiente che di queste due coppie l'una non sia separata mediante l'altra; dunque:

Due involuzioni sovrapposte (ossia contenute in una medesima forma di 1ª specie) hanno sempre una coppia comune d'elementi coniugati, eccettuato il caso che entrambe le involuzioni siano dotate d'elementi doppi, e gli elementi doppi dell'una siano separati mediante gli elementi doppi dell'altra.

La fig. 130ª (del pari che la 129ª) ci presenta i casi di due involuzioni con una coppia comune  $EE'$  di elementi coniugati. La fig. 131ª illustra invece il caso in cui la coppia comune non esiste.

a) Il problema che precede (cioè la ricerca della coppia d'elementi coniugati comune a due involuzioni sovrapposte) rientra in quello di determinare (in una punteggiata, in un fascio o in una conica) due elementi che formino sistema armonico coll'una e coll'altra di due coppie date (N° 55,  $d$ ).

Si tratti per esempio di punti situati in linea retta; si proiettino le coppie date sopra un circolo da un punto  $O$  del medesimo; le proiezioni siano  $MN, UV$  (fig. 130ª). Le tangenti al circolo in  $MN$  concorrano in  $S$ ; le tangenti in  $U, V$  concorrano in  $T$ . Se la coppia  $MN$  non è separata mediante la coppia  $UV$ , la retta  $ST$  segnerà il circolo in due punti  $EE'$ , e questi saranno i domandati.

b) I punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $AA' . BB'$  costituiscono la coppia di elementi coniugati comune a due altre involuzioni, l'una determinata dalle coppie  $AB . A'B'$ , l'altra dalle coppie  $AB' . A'B$  (N° 160,  $g$ ).

Di qui si cava una maniera di costruire i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $AA' . BB'$  di punti in linea retta. Prendasi ad arbi-

trio un punto  $G$  fuori della retta data e descrivansi i circoli  $GAB$ ,  $GA'B'$ , i quali avranno un altro punto comune  $H$ ; così pure sia  $K$  la seconda intersezione dei circoli  $GAB'$ ,  $GA'B$ . Ogni circolo descritto pei punti  $GH$  incontra la retta data in due punti coniugati dell'involuzione  $AB \cdot A'B'$  (N° 98), ed analogamente ogni circolo per  $GK$  dà due punti coniugati dell'involuzione  $AB' \cdot A'B$ . Dunque, se si descrive il circolo  $GHK$  e se questo incontra la retta data, i due punti d'intersezione saranno gli elementi doppi dell'involuzione  $AA' \cdot BB'$  (1).

**165.** Dalle cose che precedono risulta che la ricerca dei punti uniti di due serie proiettive di punti  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$  di una conica (e per conseguenza degli elementi uniti di due qualsivogliano forme proiettive sovrapposte) si riduce alla costruzione della retta  $s$ , sulla quale si segano le coppie di rette  $AB'$  e  $A'B$ ,  $AC'$  e  $A'C$ ,  $BC'$  e  $B'C$  ... E così pure la ricerca dei punti doppi d'un'involuzione  $AA' \cdot BB'$  ... si riduce alla costruzione della retta  $s$ , sulla quale si segano le coppie di rette  $AB$  ed  $A'B'$ ,  $AB'$  ed  $A'B$ , ... ovvero le coppie di tangenti in  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ , ...

Viceversa, se è data ad arbitrio una retta  $s$  (non tangente alla conica), riesce determinata un'involuzione di punti sulla conica; giacchè basta condurre dai vari punti di  $s$  le coppie di tangenti alla conica, e i punti di contatto formeranno le coppie di punti coniugati.

Invece, perchè siano determinate due serie proiettive  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$ , bisogna che, oltre alla retta  $s$ , sia data una coppia di punti corrispondenti  $AA'$ ; ciascun punto di  $s$  unito ad  $A$ ,  $A'$  dà due rette che incontreranno di nuovo la conica risp. in due punti corrispondenti  $B'$ ,  $B$ .

Due serie proiettive di punti determinano un'involuzione; imperocchè dalle due serie si deduce la retta  $s$  e questa individua l'involuzione. Se le due serie hanno due punti uniti, questi sono anche gli elementi uniti dell'involuzione.

## § 19. Problemi di 2° grado.

**166. PROBLEMA.** — Dati cinque punti  $O$ ,  $O'$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  di una conica, trovare le intersezioni della curva con una data retta  $s$ .

**SOLUZIONE.** — Se da  $O$  e da  $O'$  (figura 132\*) si proiettano gli altri punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... della conica, i fasci  $O(A, B, C, \dots)$ ,  $O'(A, B, C, \dots)$  sono proiettivi, epperò segheranno la trasversale  $s$  in punti formanti due pun-

Date cinque tangenti  $o$ ,  $o'$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  di una conica, trovare le tangenti che si possono condurre alla curva da un dato punto  $S$ .

Se colle rette  $o$ ,  $o'$  (fig. 135\*) si segano le altre tangenti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... della conica, le punteggiate  $o(a, b, c, \dots)$ ,  $o'(a, b, c, \dots)$  sono proiettive, epperò si proietteranno dal centro  $S$  mediante due fasci proiettivi concentrici.

(1) CHASLES, *Géom. sup.*, N° 263.

teggiate proiettive sovrapposte. Se  $M$  è un punto unito di queste punteggiate, sarà  $M$  un punto della conica, perchè in  $M$  si segano due raggi corrispondenti de' due fasci. Dunque i punti comuni alla conica ed alla retta  $s$  altro non sono che i punti uniti delle due punteggiate proiettive sovrapposte, determinate dall'incontro di  $s$  colle tre coppie di raggi corrispondenti  $OA$  ed  $O'A$ ,  $OB$  ed  $O'B$ ,  $OC$  ed  $O'C$ . Questi punti uniti possono essere due, uno solo o nessuno, cioè la retta  $s$  può segare la conica in due punti, toccarla in un punto o non incontrarla affatto. Per la costruzione de' punti uniti veggasi il N° 162, b).

Nello stesso modo si risolve il problema, se della conica fossero dati quattro punti  $O, O', A, B$  e la tangente  $o$  in  $O$ ; ovvero tre punti  $O, O', A$  e le tangenti  $o, o'$  in  $O, O'$ . Nel primo di questi casi, i fasci sarebbero determinati dalle tre coppie di raggi  $o$  ed  $O'O$ ,  $OA$  ed  $O'A$ ,  $OB$  ed  $O'B$ ; nel secondo caso dalle tre coppie  $o$  ed  $O'O$ ,  $OO'$  ed  $o'$ ,  $OA$  ed  $O'A$ .

Se della conica fossero invece date cinque tangenti, ovvero quattro tangenti ed un punto di contatto, ovvero tre tangenti e due punti di contatto, si potrebbe cominciare dal costruire (N° 134, 140, 141, b) gli altri punti di contatto; allora il problema sarebbe ridotto ad uno de' casi che precedono.

**167.** Nella costruzione del N° antecedente, a sinistra, suppongasì che la conica sia un'iperbole, o la trasversale  $s$  un assintoto (fig. 133"); le punteggiate proiettive sovrapposte, segnate in  $s$  dai fasci  $O(A, B, C, \dots)$ ,  $O'(A, B, C, \dots)$ , avranno in questo caso un solo punto unito, e questo a distanza infinita (il punto di contatto dell'iperbole coll'assintoto  $s$ ). Ma (N° 77) in due punteg-

Se  $m$  è un raggio unito di questi fasci, sarà  $m$  una tangente della conica, perchè in  $m$  cadono due punti corrispondenti delle due punteggiate. Dunque le tangenti della conica che passano per  $S$  non sono altro che i raggi uniti de' due fasci proiettivi concentrici, determinati dai raggi che da  $S$  proiettano le tre coppie di punti corrispondenti  $oa$  ed  $o'a$ ,  $ob$  ed  $o'b$ ,  $oc$  ed  $o'c$ . Questi raggi uniti possono essere due, uno solo o nessuno, cioè può accadere che da  $S$  si possano condurre due tangenti, o che  $S$  sia un punto della curva, o che per  $S$  non passi alcuna tangente. Per la costruzione de' raggi uniti, veggasi il N° 162, a).

Nello stesso modo si risolverebbe il problema, se della conica fossero date quattro tangenti  $o, o', a, b$  ed il punto di contatto  $O$  di  $o$ ; ovvero tre tangenti  $o, o', a$  e i punti di contatto  $O, O'$  di  $o, o'$ . Nel primo di questi casi, le punteggiate sarebbero determinate dalle tre coppie di punti  $O$  ed  $o'o$ ,  $oa$  ed  $o'a$ ,  $ob$  ed  $o'b$ ; nel secondo caso dalle tre coppie  $O$  ed  $o'o$ ,  $oo'$  ed  $O'$ ,  $oa$  ed  $o'a$ .

Se della conica fossero invece dati cinque punti, ovvero quattro punti e la tangente in uno di essi, ovvero tre punti e le tangenti in due di essi, si potrebbe cominciare dal costruire (N° 128, 134, 138) le tangenti negli altri punti dati; allora il problema sarebbe ridotto ad uno de' casi che precedono.



giate proiettive sovrapposte, i cui punti uniti coincidano in un solo punto all'infinito, il segmento compreso fra due punti corrispondenti qualsivogliano ha una lunghezza costante; dunque:

Se intorno a due punti fissi  $O, O'$  di un'iperbole si fanno girare due raggi che si seghino costantemente sulla curva, il segmento  $PP'$  intercetto da questi raggi sopra un assintoto è di grandezza costante (<sup>1</sup>).

**168.** Se nel N° 166, a sinistra, si suppone che  $s$  sia la retta all'infinito, il problema diviene:

Dati cinque punti  $O, O', A, B, C$  di una conica, costruirne i punti all'infinito (fig. 134<sup>a</sup>).

Considerando ancora i fasci proiettivi  $O(A, B, C, \dots)$ ,  $O'(A, B, C, \dots)$ , che segnano sulla retta  $s$  (ora all'infinito) due punteggiate proiettive sovrapposte, i cui punti uniti sono i domandati, osserviamo che dovendo ciascuno di questi punti uniti essere comune alla retta (all'infinito)  $s$  e a due raggi corrispondenti de' due fasci, questi raggi saranno paralleli; dunque il problema si riduce a trovare le coppie di raggi corrispondenti paralleli ne' due fasci anzidetti.

A quest'uopo conducansi per  $O$  le rette  $OA', OB', OC'$  ordinatamente parallele alle  $O'A, O'B, O'C$ ; e si costruiscano (N° 162, a) i raggi uniti de' due fasci proiettivi concentrici determinati dalle coppie  $OA$  ed  $OA'$ ,  $OB$  ed  $OB'$ ,  $OC$  ed  $OC'$ . Se i raggi uniti sono due  $OM, ON$ , la conica individuata dai cinque punti dati sarà un'iperbole, i cui punti all'infinito sono nelle direzioni  $OM, ON$ , vale a dire, i cui assintoti sono paralleli alle  $OM, ON$ .

Se vi è un solo raggio unito  $OM$ , la conica individuata dai cinque punti dati è una parabola, il cui punto all'infinito è nella direzione  $OM$ .

Se non vi è alcun raggio unito, la conica individuata dai cinque punti dati, non avendo punti comuni colla retta all'infinito, è un'ellisse.

Nel primo di questi casi (fig. 134<sup>a</sup>), se si vogliono costruire gli assintoti dell'iperbole, basterà considerare questa come individuata dai due punti all'infinito e da tre altri punti, per esempio  $A, B, C$ , cioè considerarla (N° 122) come generata mediante i due fasci proiettivi di raggi paralleli gli uni ad  $OM$ , gli altri ad  $ON$ , e de' quali due corrispondenti passino per  $A$ , altri due per  $B$ , altri due per  $C$ . I raggi di questi fasci che corrispondono alla retta all'infinito, che è la congiungente de' centri, saranno gli assintoti domandati.

Dunque (fig. 134<sup>a</sup>), se diconsi  $a, b, c$  i raggi paralleli ad  $OM$  e passanti per  $A, B, C$ ;  $a', b', c'$  i raggi paralleli ad  $ON$  e passanti per  $A, B, C$ ; congiungasi il punto  $ab'$  col punto  $a'b$ , ed il punto  $bc'$  col punto  $b'c$ ; e sia  $K$  l'intersezione delle due congiungenti. Le rette condotte per  $K$  parallelamente ad  $OM, ON$  sono gli assintoti cercati.

**169.** Il problema « condurre da un punto dato  $S$  le tangenti alla conica della quale siano dati cinque punti  $ABCDE$  » si può anche far dipendere

(<sup>1</sup>) BRIANCHON, I. c., p. 36.

dal problema del N° 166 (a sinistra), ricorrendo alle proprietà dell'involuzione (N° 160, e), che si ottiene segnando la conica con trasversali uscenti dal punto  $S$ .

Conducansi le rette  $SA, SB$  (fig. 136<sup>a</sup>), che incontreranno la conica in due nuovi punti  $A', B'$ , i quali si sanno costruire (coll'uso della sola riga e senza descrivere la curva) per mezzo del teorema di PASCAL (N° 124, a destra). Nella figura i punti  $A', B'$  sono costruiti mediante gli esagoni  $ADCBEA', BECADB'$ . Congiungasi il punto comune alle  $AB, A'B'$  col punto comune alle  $AB', A'B$ ; la congiungente  $s$  conterrà (N° 160, a) i punti di contatto delle tangenti che escono da  $S$ . La questione è così ridotta a trovare le intersezioni della conica colla retta  $s$  (N° 166, a sinistra).

Lasciamo allo studioso di eseguire la costruzione correlativa (fig. 154<sup>a</sup>), mediante la quale il problema « trovare i punti comuni ad una data retta  $s$  e alla conica individuata da cinque tangenti date » si riduce al problema del N° 166 (a destra).

**170. PROBLEMA.** — Costruire una conica che passi per quattro punti dati  $Q, R, S, T$  e tocchi una retta data  $s$  (non passante per alcuno de' punti dati).

**SOLUZIONE.** — I lati  $QT, RS, QR, ST$  del quadrilatero  $QRST$  seghino  $s$  in  $A, A', B, B'$  (fig. 137<sup>a</sup>); e costruiscansi (N° 162, d) i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $AA', BB'$ .

Se vi sono due punti doppi  $M, N$ , ciascuno di essi sarà (N° 145, a sinistra) punto di contatto fra  $S$  ed una conica circoscritta al quadrangolo  $QRST$ ; onde il problema sarà risoluto dalle due coniche  $QRSTM, QRSTN$ , ciascuna delle quali si potrà costruire per punti, per mezzo del teorema di PASCAL (N° 124, a destra).

Se non vi sono punti doppi, non vi sarà alcuna conica che soddisfaccia alle proposte condizioni.

Costruire una conica che tocchi quattro rette date  $q, r, s, t$  e passi per un dato punto  $S$  (non situato in alcuna delle rette date).

**SOLUZIONE.** — Si proiettino dal centro  $S$  i punti  $qt, rs, qr, st$  del quadrilatero  $qrst$  mediante i raggi  $a, a', b, b'$  (fig. 138<sup>a</sup>); e costruiscansi (N° 162, e) i raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $aa', bb'$ .

Se vi sono due raggi doppi  $m, n$ , ciascuno di essi sarà (N° 145, a destra) tangente in  $S$  ad una conica inscritta al quadrilatero  $qrst$ ; onde il problema sarà risoluto dalle due coniche  $qrstm, qrstn$ , ciascuna delle quali si potrà costruire per tangenti, col mezzo del teorema di BRIANCHON (N° 124, a sinistra).

Se non vi sono raggi doppi, non esisterà alcuna conica soddisfacente alle condizioni proposte.

a) Se a sinistra si suppone  $s$  a distanza infinita, il problema diviene:

Costruire una parabola che passi per quattro punti dati  $Q, R, S, T$ . Da un centro arbitrario  $O$  (fig. 139<sup>a</sup>) si conducano i raggi  $a, a', b, b'$  ordinatamente paralleli alle  $QT, RS, QR, ST$ ; e si costruiscano i raggi doppi del-

l'involuzione determinata dalle coppie  $aa'$ ,  $bb'$ . Se vi sono due raggi doppi, ciascuno di essi darà la direzione nella quale si trova il punto all'infinito di una parabola passante pei quattro punti dati; onde il problema sarà ridotto all'ultimo del N° 128.

Per quattro punti dati o passano due parabole o nessuna; nel primo caso le altre coniche circoscritte sono ellissi ed iperboli; nel secondo caso soltanto iperboli. Il primo caso ha luogo quando ciascuno de' quattro punti dati è esterno al triangolo formato dagli altri tre; il secondo, quando uno de' quattro punti è interno al triangolo che ha i vertici negli altri tre.

b) Se nell'enunciato a destra una delle rette  $qrst$  è all'infinito, il problema diviene:

Costruire una parabola che tocchi tre rette date e passi per un punto dato.

**174. PROBLEMA.** — Costruire una conica che passi per tre punti dati  $P, P', P''$  e tocchi due rette date  $q, s$  (nessuna delle quali passi per alcuno de' punti dati).

La soluzione è fondata sul teorema del N° 149 (a sinistra). Imaginiamo la conica cercata e la coppia di tangenti date  $q, s$  intersecate dalla trasversale  $PP'$  nelle coppie di punti  $PP', BB'$  (fig. 140<sup>a</sup>); in virtù di quel teorema, se  $A, A_1$  sono i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie anzidette, per uno di questi passerà la corda di contatto fra la conica e le rette  $qs$ . Analogamente si dica per la trasversale  $PP''$ , la quale seghi le  $q, s$  in  $D, D''$ ; cioè, si costruiscano del pari i punti doppi  $C, C_1$  dell'involuzione determinata dalle coppie  $PP'', DD''$ ; la corda di contatto passerà per  $C$  o per  $C_1$ . Concludiamo che il problema ammette quattro soluzioni; cioè, se entrambe le involuzioni ( $PP', BB'$ ), ( $PP'', DD''$ ) ammettono punti doppi ( $A, A_1$ ), ( $C, C_1$ ), vi sono quattro coniche soddisfacenti alle poste condizioni; e per esse le corde di contatto colle tangenti  $q, s$  sono ordinatamente  $AC, A_1C, AC_1, A_1C_1$ . Di

Costruire una conica che tocchi tre rette date  $p, p', p''$  e passi per due punti dati  $Q, S$  (nessuno de' quali sia situato in alcuna delle rette date).

La soluzione è fondata sul teorema del N° 149 (a destra). Imaginiamo condotte dal punto  $pp'$  le tangenti  $p, p'$  alla conica e i raggi  $b, b'$  ai punti  $Q, S$  (fig. 141<sup>a</sup>); in virtù di quel teorema, se  $a, a_1$  sono i raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $pp', bb'$ , in uno di essi cadrà il punto di concorso delle tangenti alla conica ne' punti  $Q, S$ . Analogamente si dica pel punto  $pp''$ , dal quale si tirino i raggi  $d, d''$  ai punti  $Q, S$ ; cioè si costruiscano del pari i raggi doppi  $e, e_1$  dell'involuzione determinata dalle coppie  $pp'', dd''$ ; il punto di concorso anzidetto si troverà in  $e$  o in  $e_1$ . Concludiamo che il problema ammette quattro soluzioni; cioè, se entrambe le involuzioni ( $pp', bb'$ ), ( $pp'', dd''$ ) ammettono raggi doppi ( $a, a_1$ ), ( $e, e_1$ ), vi saranno quattro coniche soddisfacenti alle poste condizioni; e per esse i punti di concorso delle tangenti in  $Q, S$  sono ordinatamente  $ae, a_1e, ae_1, a_1e_1$ . Di ciascuna fra queste coniche,

ciascuna di queste coniche, verbigratzia della prima, si conoscono cinque punti, vale a dire  $P, P', P''$ , e le intersezioni di  $AC$  con  $q, s$ ; onde si potrà costruirla per punti col mezzo del teorema di PASCAL (N° 124, a destra).

verbigratzia della prima, si conoscono cinque tangenti, vale a dire  $p, p', p''$  e le congiungenti di  $ac$  con  $Q, S$ ; onde si potrà costruirla per tangenti col mezzo del teorema di BRIANCHON (N° 124, a sinistra).

**172. PROBLEMA.** — Costruire un poligono i cui vertici cadano su rette date e i cui lati passino per punti dati (<sup>1</sup>).

**SOLUZIONE.** — Per fissare le idee (fig. 142\*), supponiamo che si tratti di costruire un quadrilatero (semplice), i cui vertici, che diremo 1, 2, 3, 4, cadano ordinatamente sulle rette date  $s_1, s_2, s_3, s_4$ , ed i cui lati 12, 23, 34, 41 passino per i punti dati  $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}$ . Dal centro  $S_{12}$  proiettiamo i punti  $A_1B_1C_1 \dots$  di  $s_1$  su  $s_2$  in  $A_2B_2C_2 \dots$ ; poi dal centro  $S_{23}$  si proietti la punteggiata  $A_2B_2C_2 \dots$  su  $s_3$  in  $A_3B_3C_3 \dots$ ; indi da  $S_{34}$  si proietti  $A_3B_3C_3 \dots$  in  $A_4B_4C_4 \dots$  su  $s_4$ ; e finalmente da  $S_{41}$  si proietti  $A_4B_4C_4 \dots$  in  $ABC \dots$  su  $s_1$ . Per tal modo i punti  $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}$  sono i centri di quattro fasci proiettivi, giacchè il quarto è prospettivo al primo (sezione comune  $s_1$ ), il primo al secondo (sezione comune  $s_2$ ), il secondo al terzo (sezione comune  $s_3$ ), il terzo al quarto (sezione comune  $s_4$ ). Segue da ciò (N° 114, a) che il luogo del punto comune a due raggi corrispondenti (come  $A_1A_2$  ed  $A_4A_1$ ) del primo e quarto fascio, vale a dire il luogo del 1° vertice del quadrilatero variabile, i cui vertici 2°, 3° e 4° (come  $A_2, A_3, A_4$ ) si muovono su tre rette date ( $s_2, s_3, s_4$ ), e i cui lati ( $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ ) passano per quattro punti dati ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ), è una conica (<sup>2</sup>).

Questa conica passa per i punti  $S_{12}, S_{41}$ , centri dei fasci che la generano; quindi a determinarla bastano tre altri suoi punti, cioè i punti d'intersezione di tre coppie di raggi corrispondenti  $A_1A_2$  ed  $A_4A_1, B_1B_2$  ed  $B_4B_1, C_1C_2$  ed  $C_4C_1$ . Dopo di ciò, basterà costruire (N° 166) le intersezioni della retta  $s_1$  colla conica determinata da questi cinque punti, e ciascuna di esse potrà essere presa come vertice 1 del quadrilatero cercato.

La stessa costruzione può essere considerata sotto quest'altro aspetto. Le linee spezzate  $A_1A_2A_3A_4A_1, B_1B_2B_3B_4B_1, C_1C_2C_3C_4C_1$  si possono riguardare come tentativi fatti per costruire il quadrilatero cercato: tentativi che danno de' poligoni non chiusi, ma aperti, giacchè il punto  $A$  non coincide con  $A_1$ , nè  $B$  con  $B_1$ , nè  $C$  con  $C_1$ . Questi tentativi, e tutti gli altri analoghi che si possono pensare, ma che non è necessario di eseguire, danno sulla retta  $s_1$  due punteggiate  $A_1B_1C_1 \dots, ABC \dots$  (descritte l'una dall'origine, l'altra dal

(<sup>1</sup>) PONCELET, I. c., p. 345.

(<sup>2</sup>) Questo teorema (se un poligono semplice si deforma in modo che i suoi lati passino per punti dati e i suoi vertici, meno uno, corrono su rette date, l'ultimo vertice descrive una conica) è di MACLAURIN (Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres, année 1735).

termine della spezzata o poligono aperto), che sono proiettive perchè la seconda nasce dalla prima mediante proiezioni dai centri  $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}$  e sezioni colle trasversali  $s_2, s_3, s_4, s_1$ . Ciascuno de' punti uniti di queste punteggiate risolve il problema; imperocchè, se in esso si pone l'origine della spezzata, ivi cade anche il termine della medesima, sicchè il poligono risulta chiuso.

Il metodo, sì in questo, sì ne' problemi seguenti, è il medesimo qualunque sia il numero dei lati del poligono da costruirsi.

**173. PROBLEMA.** — In una conica data <sup>(1)</sup> inscrivere un poligono i cui lati passino per punti dati.

**SOLUZIONE.** — Si tratti per es. di inscrivere un triangolo, i cui lati passino ordinatamente per tre punti dati  $S_1, S_2, S_3$  (fig. 143<sup>a</sup>). Facciamo tre tentativi; cioè dal centro  $S_1$  proiettiamo tre punti arbitrari  $A, B, C$  della curva in  $A_1, B_1, C_1$  sulla curva stessa, poi dal centro  $S_2$  in  $A_2, B_2, C_2$ , poi dal centro  $S_3$  in  $A', B', C'$  (sempre sulla curva). Siccome il punto di arrivo  $A'$  o  $B'$  o  $C'$  non coincide col punto di partenza corrispondente  $A$  o  $B$  o  $C$ , così in luogo di un triangolo inscritto, quale si domanda nell'enunciato del problema, avremo un poligono aperto  $AA_1A_2A', BB_1B_2B', CC_1C_2C'$ . Mediante le successive proiezioni dai centri  $S_1, S_2, S_3$ , dalla serie di punti  $ABC \dots$  si deducono le serie  $A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots, A'B'C' \dots$ ; perciò (N° 158 e, 160 e) la serie  $ABC \dots$  de' punti di partenza e la serie  $A'B'C' \dots$  de' punti di arrivo sono proiettive (N° 157). Ma il problema sarebbe risoluto se il punto d'arrivo coincidesse col punto di partenza; dunque, se le due serie proiettive  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  hanno punti uniti, ciascuno di questi potrà servire di primo vertice ad un triangolo soddisfacente alle condizioni proposte. Si trovi adunque (N° 157, b) la retta in cui si segano le coppie di lati opposti dell'esagono inscritto  $AB'CA'BC'$ , e si costruiscano (N° 166) le intersezioni  $M, N$  di questa retta colla conica; ciascuna di esse darà una soluzione del problema <sup>(2)</sup>.

**174.** Con metodo analogo si risolve il problema correlativo:

Ad una conica data <sup>(3)</sup> circoscrivere un poligono i cui vertici cadono su rette date.

Si tratti per es. di circoscrivere alla conica un triangolo, il quale debba avere i suoi vertici nelle rette  $s_1, s_2, s_3$  (fig. 144<sup>a</sup>). In un punto arbitrario  $A$  della conica si conduca la tangente  $a$  sino ad incontrare  $s_1$  in un punto, e da esso si tiri un'altra tangente  $a_1$  (punto di contatto  $A_1$ ); questa incontrerà  $s_2$  in un punto, dal quale si condurrà la seconda tangente  $a_2$  (punto di contatto  $A_2$ ); e dal punto comune a questa ed alla retta  $s_3$  si tirerà di nuovo la tangente  $a'$ , il cui punto di contatto sia  $A'$ . Il problema sarebbe risoluto se il punto  $A'$  coincidesse con  $A$ , cioè se coincidessero le tangenti

<sup>(1)</sup> Interamente descritta, o individuata da cinque punti dati.

<sup>(2)</sup> PONCELET, *l. c.*, p. 352.

<sup>(3)</sup> Interamente descritta, o individuata per mezzo di cinque tangenti date.

$a, a'$ . Se s'immaginano fatti altri tentativi simiglianti, ne quali si parta da altri punti arbitrari  $B, C, \dots$  della conica, si otterranno successivamente le serie di punti  $ABC \dots, A_1B_1C_1 \dots, A_2B_2C_2 \dots, A'B'C' \dots$ , che sono tutte proiettive fra loro. Infatti, sono proiettive la prima e la seconda serie (N° 160,  $f$ ) perchè le tangenti in  $A$  ed in  $A_1$ , in  $B$  ed in  $B_1$ , in  $C$  ed in  $C_1, \dots$  si segano sempre su  $s_1$ ; così pure sono proiettive la seconda e la terza, la terza e la quarta, epperò la prima e la quarta (N° 158,  $e$ ). E siccome il problema sarebbe risoluto se coincidessero  $A$  ed  $A'$ , ovvero  $B$  ed  $B'$ , ecc., così ciascuno de' punti uniti delle serie proiettive  $ABC \dots, A'B'C' \dots$  potrà servire di punto di contatto al primo lato di un triangolo soddisfacente alle proposte condizioni. Basterà pertanto (N° 157,  $c$ ) fare tre tentativi, cioè, assunti tre punti arbitrari  $A, B, C$  nella conica, dedurne i punti corrispondenti  $A', B', C'$ ; e costruire i punti  $M, N$  comuni alla conica ed alla retta che contiene i punti d'intersezione dei lati opposti dell'esagono inscritto  $AB'CA'BC'$  (1).

**175.** Il caso particolare che, nel problema del N° 173, i punti fissi  $S_1, S_2, \dots$  siano tutti in una stessa retta  $s$ , dev'essere trattato separatamente.

Se il numero dei lati del poligono cercato è pari, siccome ha luogo il teorema del N° 146,  $a$ ), così il problema ammetterà in questo caso nessuna soluzione o infinite soluzioni. Inscrivasi nella conica un poligono, per es. un ottagono (fig. 108<sup>a</sup>) i cui primi sette lati passino pei punti dati  $S_1, S_2, \dots, S_7$ ; l'ultimo lato passerà allora, in virtù di quel teorema, per un punto fisso  $S$  di  $s$ , che non è arbitrario, bensì determinato dai punti dati  $S_1, S_2, \dots, S_7$ . Dunque, se l'ultimo punto dato  $S_8$  coincide con  $S$ , vi sono infiniti ottagoni che soddisfanno alle poste condizioni; se tale coincidenza non ha luogo, non v'è alcuna soluzione.

Se il numero de' lati del poligono domandato è dispari, il problema è determinato. Supponiamo che si tratti di inscrivere un ettagono (fig. 108<sup>a</sup>) i cui lati debbano passare pei punti dati  $S_1, S_2, \dots, S_7$  in linea retta. Pel citato teorema (N° 146,  $a$ ) vi sono infiniti ottagoni i cui primi sette lati passano per sette punti dati; e l'ottavo lato passa per un punto fisso  $S$  della medesima retta. Se fra questi ottagoni ve n'ha uno pel quale l'ottavo lato sia una tangente della conica, il problema sarà risoluto, giacchè un tale poligono, avendo due vertici infinitamente vicini o coincidenti, si ridurrà propriamente ad un ettagono inscritto, i cui lati passano pei sette punti dati. Dunque, se da  $S$  si possono condurre tangenti alla conica, il punto di contatto di ciascuna di esse darà una soluzione (N° 146,  $b$ ). Ond'è che le soluzioni sono due, una o nessuna, a seconda della posizione del punto  $S$  rispetto alla conica (2).

La fig. 110<sup>a</sup> si riferisce al caso di questo problema in cui si tratti d'inscrivere un triangolo (3).

(1) PONCELET, *I. c.*, p. 354.

(2) PONCELET, *I. c.*, p. 356.

(3) PAPPO, *I. c.*, VII, 117.

Lo studioso può esercitarsi a risolvere il problema correlativo (circoscrivere ad una conica un poligono, i cui vertici cadano su rette date di un fascio), il quale del pari è indeterminato o impossibile se il poligono è d'ordine pari; determinato e di 2° grado, se il poligono è d'ordine dispari (fig. 109° e 111°).

**176. LEMMA.** — Se due coniche si segano nei punti  $ABCC'$ , e per  $A, B$  si tirino risp. due rette a segare la prima conica in  $F, G$  e la seconda in  $F', G'$ , le corde  $FG, F'G'$  concorrono in un punto  $H$  della retta  $CC'$  (fig. 145°).

Infatti, la trasversale  $CC'$  incontra la prima conica e i lati opposti del quadrangolo inscritto  $ABGF$  in sei punti accoppiati in involuzione (N° 143, a sinistra); e la stessa cosa vale per la seconda conica e pel quadrangolo inscritto  $ABGF'$ . Ma le due involuzioni coincidono (N° 98), giacchè hanno due coppie comuni di punti coniugati, vale a dire: la coppia de' punti  $CC'$  in cui la trasversale sega l'una e l'altra conica; e la coppia de' punti in cui quella incontra i lati opposti  $AFF', BGG'$  che appartengono ad entrambi i quadrangoli. Dunque ogni altra coppia di punti coniugati sarà comune alle due involuzioni: cioè la trasversale  $CC'$  incontrerà  $FG$  ed  $F'G'$  in uno stesso punto  $H$ , coniugato a quello in cui incontra  $AB$ .

a) La proposizione che precede, semplice corollario del teorema di DESARGUES, suggerisce immediatamente la soluzione de' due seguenti problemi, l'uno di 1°, l'altro di 2° grado.

**PROBLEMA.** — Dati sette punti  $ABCDEFGF$ , trovare il quarto punto comune alle due coniche risp. circonscritte ai pentagoni  $ABCDE, ABCFG$  (fig. 145°).

Da due de' punti comuni tirinsi le  $AF, BG$  che seghino la prima conica in  $F', G'$ : punti che si sanno costruire (N° 124, a destra). Le rette  $FG, F'G'$  concorreranno in un punto  $H$  della corda che unisce gli altri due punti comuni. Questa corda sarà adunque  $HC$ , e basterà costruire il punto  $C'$  in cui essa incontra l'una o l'altra conica: il punto  $C'$  sarà il cercato.

b) **PROBLEMA.** — Dati otto punti  $ABDEFGMN$ , trovare i due punti di ulteriore intersezione delle due coniche risp. circonscritte ai pentagoni  $ABDEN, ABFGM$  (fig. 145°).

Si tirino le  $AF, BG$  che seghino la prima conica in  $F', G'$ ; il punto  $H$  comune alle  $FG, F'G'$  apparterrà alla corda che unisce i due punti cercati. Analogamente, se  $AM$  sega di nuovo la prima conica in  $M'$ , il punto  $K$  comune alle  $GM, G'M'$  sarà situato nella corda medesima. Dunque i punti cercati giacciono nella  $HK$ ; ed ora il problema è ridotto a quello (N° 166) di costruire le intersezioni  $C, C'$  dell'una o dell'altra conica colla retta  $HK$  (1°).

c) La costruzione non cambia, se i punti  $A, B$  sono infinitamente vicini; cioè, se le due coniche toccano in un punto dato una retta data (N° 142).

In questo caso, date due coniche che si tocchino in un punto  $A$ , si

(1) GASKIN, *The geometrical construction of a conic section etc.* (Cambridge 1852), pag. 26, 40.

ottiene la retta  $HK$  congiungente i due punti  $C, C'$  d'intersezione. Se questa retta venisse a passare per  $A$ , uno de' punti  $C, C'$  coinciderebbero collo stesso  $A$ , giacchè una conica non può avere tre punti in linea retta. Allora, si può dire che de' quattro punti comuni alle due coniche, tre sono riuniti (o infinitamente vicini) in  $A$  (cfr. N° 142); si suol anche dire che le due coniche si osculano nel punto  $A$ . La costruzione  $a$ ) dà un punto  $H$  della retta che congiunge  $A$  col quarto punto  $C$  d'intersezione. Può finalmente accadere che questa retta coincida colla tangente in  $A$ ; allora si dirà che  $A$  fa le veci di quattro punti coincidenti (o infinitamente vicini) comuni alle due coniche.

d) Si applichi il lemma ad una conica data e ad un cerchio che la tocchi nel punto  $A$ . Da  $A$  si tiri la normale (cioè la perpendicolare alla tangente in  $A$ ), la quale incontri di nuovo la conica in  $F$  ed il cerchio in  $F'$ : e si descriva sul diametro  $AF$  un cerchio, il quale, essendo tangente in  $A$  e secante in  $F$ , segnerà la conica in un altro punto  $G$ : e l'angolo  $AGF$  sarà retto. Il primo cerchio tagli  $AG$  in  $G'$ : in virtù del lemma, le  $FG, F'G'$  concorreranno sulla corda  $HK$ . Ma  $FG, F'G'$  sono parallele, perchè anche l'angolo  $AG'F'$  è retto; dunque per tutt'i cerchi tangenti in  $A$  alla conica la corda  $HK$  ha una direzione costante, cioè la direzione di  $FG$ .

Se la corda  $HK$  passa per  $A$ , il cerchio sarà osculatore alla conica in  $A$ . Laonde conducasi per  $A$  la parallela ad  $FG$ , che seghi la conica in  $C$ : il cerchio tangente in  $A$  e secante in  $C$  sarà il cerchio osculatore in  $A$  (\*).

Viceversa, si può costruire la conica che passi per tre punti dati  $A, P, Q$ , ed in  $A$  abbia un dato cerchio osculatore. Le  $AP, AQ$  seghino il cerchio dato in  $P', Q'$ ; e sia  $U$  il punto di concorso delle  $PQ, P'Q'$ . Tirisi la  $AU$ , che seghi di nuovo il cerchio in  $C$ ; la conica cercata passerà per  $C$ , epperò è determinata dai quattro punti  $A, P, Q, C$  e dalla tangente in  $A$  (la tangente del cerchio).

e) La proposizione correlativa del lemma precedente si enuncia così:

Se  $a, b$  sono due tangenti comuni a due coniche, e si conducano da due punti presi risp. in  $a, b$  le tangenti  $f, g$  alla prima conica, e le tangenti  $f', g'$  alla seconda, i punti  $fg, f'g'$  saranno in linea retta col punto di concorso delle altre due tangenti comuni alle coniche date.

La qual proposizione serve a risolvere i problemi correlativi de' due  $a$ ) e  $b$ ), cioè a trovare le restanti tangenti comuni (una o due) di due coniche, ciascuna individuata da cinque tangenti dato, fra le quali ve ne siano già tre o due di comuni.

**177. PROBLEMA.** — Dati undici punti  $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, P$ , costruire per punti la conica che passa per  $P$  e pei quattro punti (non dati) comuni alle coniche (non descritte)  $ABCDE, A_1B_1C_1D_1E_1$  (2).

(\*) PONCELET, l. c., N° 334-7.

(\*) PONCELET, l. c., N° 389.



Si conduca per  $P$  una trasversale arbitraria, e si costruiscano ( $N^{\circ}$  166, a sinistra) i punti  $M, M'$  comuni ad essa ed alla conica  $ABCDE$ , ed i punti  $N, N'$  comuni alla trasversale medesima ed alla conica  $A_1B_1C_1D_1E_1$ . Siccome queste due coniche e la cercata debbono essere circoscritte ad un medesimo quadrangolo, così avrà luogo il teorema di DESARGUES. Dunque, se si costruirà ( $N^{\circ}$  102, a sinistra) il punto  $P'$  conjugato di  $P$  nell'involuzione determinata dalle coppie  $MM', NN'$ , il punto  $P'$  apparterrà alla conica cercata. Facendo girare la trasversale intorno a  $P$ , si otterranno altri punti della conica medesima.

**178. PROBLEMA.** — Dati dieci punti  $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  ed una retta  $s$ , costruire una conica che tocchi  $s$  e passi pei quattro punti (non dati) comuni alle coniche (non descritte)  $ABCDE, A_1B_1C_1D_1E_1$ .

Si costruiscano ( $N^{\circ}$  166, a sinistra) i punti  $MM'$  comuni ad  $s$  ed alla conica  $ABCDE$ , ed i punti  $NN'$  comuni ad  $s$  ed alla conica  $A_1B_1C_1D_1E_1$ ; e si trovino i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $MM', NN'$ . Se  $P$  è uno de' punti doppi, sarà  $P$  il punto di contatto ( $N^{\circ}$  145) fra  $s$  ed una conica circoscritta al quadrangolo formato dai quattro punti comuni alle coniche  $ABCDE, A_1B_1C_1D_1E_1$ . Dunque il problema è ora ridotto a quello del  $N^{\circ}$  precedente.

**179.** Le costruzioni correlative danno le soluzioni de' problemi correlativi:

Costruire una conica che passi per un punto dato o tocchi una retta data e sia inscritta nel quadrilatero formato dalle quattro tangenti (non date) comuni a due coniche (non descritte), ciascuna delle quali sia individuata per mezzo di cinque tangenti.

**180. PROBLEMA.** — Da un punto dato  $S$  condurre una retta che da quattro rette date  $a, b, c, d$  sia segata in quattro punti il cui rapporto anarmonico sia dato.

Si è veduto ( $N^{\circ}$  115,  $b'$ ) che le rette, le quali da quattro rette  $abcd$  date sono segate in quattro punti di dato rapporto anarmonico, sono tutte tangenti ad una stessa conica, che tocca anche le rette date; e che, se  $D$  è il punto di contatto di  $d$ , e  $A, B, C$  siano i punti ove  $d$  sega  $a, b, c$ , il rapporto anarmonico  $(ABCD)$  è uguale a quello de' quattro punti in cui le  $abcd$  sono incontrate da un'altra tangente qualsivoglia della conica. Dunque la soluzione del problema sarà la seguente:

Costruiscasi ( $N^{\circ}$  53,  $f$ ) quel punto  $D$  della retta  $d$ , il quale insieme coi punti  $ad \equiv A, bd \equiv B, cd \equiv C$  dà il rapporto anarmonico  $(ABCD)$  uguale al dato. Indi ( $N^{\circ}$  166, a destra) costruiscansi le rette che passano per  $S$  e toccano la conica individuata dalle quattro tangenti  $abcd$  e dal punto di contatto  $D$  in  $d$ ; ciascuna di codeste rette risolverà il problema proposto.

a) Se una delle rette  $abcd$  fosse a distanza infinita, il problema diverrebbe il seguente ( $N^{\circ}$  53,  $c$ ):

Per un punto dato  $S$  condurre una retta tale, che i suoi segmenti intercetti fra tre rette date  $a, b, c$  (cioè fra  $a$  e  $b$ , fra  $a$  e  $c$ ) siano fra loro in un rapporto dato.

Si trovi in  $a$  quel punto  $A$  che insieme coi punti  $ab \equiv B$ ,  $ac \equiv C$  dà al rapporto  $AB : AC$  il valore dato, e conducansi da  $S$  le tangenti alla parabola determinata dalle tangenti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e dal punto di contatto  $A$  in  $a$ .

b) La costruzione correlativa darà la soluzione del problema correlativo:

In una retta  $s$  trovare un punto dal quale quattro punti dati  $A, B, C, D$  si proiettino mediante raggi il cui rapporto anarmonico (N° 53,  $k$ ) sia un numero dato.

**181. PROBLEMA.** — Date due rette  $u, u'$  punteggiate proiettive, trovare due segmenti corrispondenti, i quali siano rispettivamente veduti da due punti dati  $O, O'$  sotto angoli dati (<sup>1</sup>). Prendansi in  $u'$  due punti  $A', D'$  in modo che l'angolo  $A'O'D'$  sia uguale al secondo dei dati; siano  $A, D$  i punti di  $u$  che corrispondono ad  $A', D'$ ; e trovisi in  $u$  il punto  $A_1$  tale che l'angolo  $A_1OD$  sia uguale al primo dei dati; è chiaro che il problema sarebbe risoluto, se  $OA_1$  coincidesse con  $OA$ , giacchè allora gli angoli  $AOD, A'O'D'$  sarebbero entrambi uguali ai dati. Variando simultaneamente i raggi  $OA, O'A', O'D', OD, OA_1$ , si generano de' fasci tutti proiettivi fra loro. Infatti, sono proiettivi i fasci generati da  $O'A', O'D'$ , e quelli generati da  $OA_1, OD$ , a cagione degli angoli costanti  $A'O'D', A_1OD$  (N° 82); e sono proiettivi i fasci generati da  $OA, O'A'$ , e quelli generati da  $OD, O'D'$ , a cagione della supposta proiettività fra  $u$  ed  $u'$ . Dunque sono proiettivi i fasci generati dai raggi  $OA, OA_1$ ; e i raggi uniti risolveranno il problema. Facciansi adunque tre tentativi analoghi al precedente, sicchè si ottengano tre coppie di raggi corrispondenti  $OA$  ed  $OA_1, OB$  ed  $OB_1, OC$  ed  $OC_1$ ; e costruiscansi i raggi uniti dei fasci proiettivi concentrici determinati dalle tre coppie (N° 162,  $a$ ). Se uno de' raggi uniti incontra  $u$  in  $M$ , e prendasi nella stessa  $u$  il punto  $P$  in modo che l'angolo  $MOP$  risulti uguale al primo dei dati, detti  $M', P'$  i punti di  $u'$  che corrispondono ad  $M, P$ , anche l'angolo  $M'O'P'$  sarà uguale al secondo dei dati, cioè il problema sarà risoluto.

**182. PROBLEMA.** — Date due punteggiate proiettive  $u \equiv ABC \dots$ ,  $u' \equiv A'B'C' \dots$ , trovare due segmenti corrispondenti, i quali siano uguali a segmenti dati (in grandezza e senso).

Prendansi in  $u'$  un segmento  $A'D'$  uguale al secondo segmento dato, e quindi in  $u$  il segmento  $AD$  corrispondente ad  $A'D'$ . In  $u$  assumasi il punto  $A_1$ , in modo che  $A_1D$  sia uguale al primo segmento dato; il problema sarebbe risoluto se i punti  $A, A_1$  coincidessero. Variando simultaneamente i punti  $A, A', D', D, A$ , generano altrettante punteggiate proiettive: infatti, sono proiettive le punteggiate generate da  $A$  ed  $A'$ , e quelle generate da  $D$  ed  $D'$ , a cagione della supposta proiettività di  $u, u'$ ; e sono proiettive le punteggiate descritte da  $A_1$  e  $D$ , e quelle descritte da  $A', D'$ , perchè nascono dal movimento di segmenti costanti (N° 77). Dunque sono proiettive le pun-

(<sup>1</sup>) Cioè, se i segmenti sono  $MP, M'P'$ , gli angoli  $MOP, M'O'P'$  siano dati in grandezza e in senso.

teggiate generate da  $A, A_1$ ; ed i loro punti uniti risolveranno il problema. Basterà pertanto ottenere tre coppie di punti corrispondenti  $A$  ed  $A_1, B$  e  $B_1, C$  e  $C_1$ , mediante tre tentativi; e quindi costruire i punti uniti (N° 162, b).

**183.** Allo studioso non sarà certamente sfuggita la costanza del metodo col quale sono stati risolti i precedenti problemi, sì diversi ne' loro enunciati. È un metodo generale, uniforme e diretto, applicabile in forma più o meno semplice a tutti i problemi di 2° grado, cioè a tutte le questioni che, ove fossero trattate algebricamente, dipenderebbero da un'equazione di 2° grado o da un'equazione di grado superiore riducibile al 2°. Il metodo consiste nel fare tre tentativi, i quali danno tre coppie di elementi corrispondenti di due forme proiettive sovrapposte; e gli elementi uniti forniscono senz'altro le soluzioni del problema. Perciò a buon diritto, questo modo di procedere fu considerato come un metodo geometrico di falsa posizione (\*).

**184.** I problemi di 2° grado (o riducibili al 2° grado), come tutti quelli della geometria elementare, si risolvono coll'uso esclusivo della riga e del compasso, cioè mediante intersezioni di rette e di cerchi (2). Ma d'altra parte, ciascuno di quei problemi si può far dipendere dalla determinazione degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte: la quale determinazione si riduce (N° 162) alla costruzione dei punti uniti di due serie proiettive (N° 157), date in un cerchio affatto arbitrario; laonde ne segue che un solo cerchio, descritto una volta per sempre, può bastare a risolvere tutt'i problemi di 2° grado (3) proposti intorno ad elementi dati in un piano fisso (il piano del disegno). Disegnato questo cerchio, la questione si ridurrà a trasportare sulla circonferenza di esso, mediante proiezioni e sezioni, le tre coppie di punti individuanti le due forme proiettive, i cui elementi uniti risolvono il problema; e quindi a tracciare la retta che contiene i punti d'incontro delle coppie di lati opposti dell'esagono inscritto che ha per vertici opposti i punti delle tre coppie anzidette (N° 157, c).

È superfluo accennare che, in luogo di far dipendere la soluzione del problema dagli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte, si può sempre ridurlo alla ricerca degli elementi doppi di un'involuzione (N° 165).

Nel N° 89, a) si è già dato un esempio del modo di risolvere un problema di 2° grado coll'uso della sola riga, supposto che un cerchio (ausiliario) sia tracciato nel piano del disegno, e che sia dato il centro di questo cerchio. Altri esempi si troveranno più innanzi.

**185.** In modo analogo si risolvono i problemi seguenti:

a) Date (fig. 146\*) due rette punteggiate proiettive  $u, u'$ , e due altre rette

(\*) CHASLES, *Géom. sup.*, p. 242.

(2) Problemi di 4° grado sono quelli che si risolvono colla sola riga, cioè con intersezioni di sole rette. Veggansi: LAMBERT, *l. c.*, p. 464; — BRIANCHON, *l. c.*, p. 6; — PONCELET, *l. c.*, p. 76.

(3) PONCELET, *l. c.*, p. 187; — STEINER, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Berlin 1833), p. 67.

punteggiate proiettive  $v, v'$ , per un punto dato  $O$  tirare due rette  $s, s'$  che seghino rispettivamente  $u$  ed  $u'$  in due punti corrispondenti, ed anche  $v, v'$  in due punti corrispondenti.

Tirisi per  $O$  una retta che seghi  $u', v'$  in  $A', P'$ ; sia  $A$  il punto di  $u$  che corrisponde ad  $A'$ ; e  $P$  il punto di  $v$  che corrisponde a  $P'$ . Il problema sarebbe risoluto, se le rette  $OA, OP$  coincidessero insieme. Variando simultaneamente queste rette descrivono due fasci proiettivi concentrici (determinati da tre tentativi analoghi al suesposto), i cui raggi uniti daranno le soluzioni del problema.

b) Nel problema che precede si può supporre che  $u$  ed  $u'$  siano sovrapposte, e che siano pur sovrapposte  $v, v'$ . Se tutte e quattro le punteggiate fossero in una retta unica, il problema si potrebbe enunciare così:

Date in una retta due punteggiate proiettive  $u, u'$  e due altre punteggiate proiettive  $v, v'$ , trovare una coppia di punti che siano corrispondenti sia in  $u, u'$ , sia in  $v, v'$ .

c) Fra due rette date  $u, u_1$  allongare un segmento che sia veduto da due punti fissi  $O, S$  sotto angoli dati (fig. 147<sup>a</sup>).

Per  $S$  tirinsi due rette a segare  $u, u_1$  in  $A, A_1$  così che l'angolo  $ASA_1$  sia uguale al secondo dei dati. Indi si tiri per  $O$  un'altra retta a segare  $u$  in  $A'$ , in modo che l'angolo  $A'OA_1$  sia uguale al primo dei dati. Il problema sarebbe risoluto se  $OA, OA'$  coincidessero. Tre tentativi come questo daranno tre coppie di raggi corrispondenti ( $OA$  ed  $OA'$ ,  $OB$  ed  $OB'$ ,  $OC$  ed  $OC'$ ) dei due fasci proiettivi che sarebbero descritti dalla variazione simultanea di  $OA, OA'$ ; dai raggi uniti  $OM, ON$  di questi fasci si hanno le soluzioni ( $MM_1, NN_1$ ) del problema.

d) Date due punteggiate proiettive  $u, u'$ , a partire da due dati punti corrispondenti  $A, A'$ , prendere due segmenti corrispondenti  $AM, A'M'$ , il cui rapporto  $AM : A'M' = \lambda$  sia dato.

Essendo  $A$  ed  $A', B$  e  $B', C$  e  $C'$  tre coppie di punti corrispondenti in  $u, u'$ , prendansi in  $u$  due nuovi punti  $B'', C''$  in modo che sia  $AB'' = \lambda \cdot AB', AC'' = \lambda \cdot AC'$ . I punti  $AB''C''$  ... determinano una punteggiata simile ad  $A'B'C'$  ... (N° 73), epperò una punteggiata proiettiva ad  $ABC$  .... Le punteggiate proiettive sovrapposte  $AB''C''$  ...,  $ABC$  ... hanno già il punto unito  $A$ ; l'altro punto unito  $M$  risolverà il problema, giacchè si avrà

$$AM = AM'' = \lambda \cdot A'M'.$$

Questo problema è di 1° grado.

c) Date due punteggiate proiettive sovrapposte  $ABC$  ...,  $A'B'C'$  ..., trovare un segmento  $MM'$  che abbia un dato punto di mezzo  $O$ .

Prendansi i punti  $A'', B'', C''$  in modo che  $O$  sia il punto di mezzo dei segmenti  $AA'', BB'', CC''$ ; i punti  $A''B''C''$  ... determinano una punteggiata uguale ad  $ABC$  ... epperò proiettiva ad  $A'B'C'$  .... Costruiscansi i punti uniti

delle punteggiate proiettive sovrapposte  $A'BC' \dots$ ,  $A''B'C''$ ; se  $M'$  o  $M''$  è uno di codesti punti uniti, sarà  $O$  il punto di mezzo del segmento  $MM'$ .

f) Dato un segmento  $EF$ , trovare nella retta  $EF$  due punti  $M$ ,  $M'$  tali che il segmento  $MM'$  sia uguale a un dato, e il rapporto anarmonico  $(EFMM')$  sia pure dato.

Nella retta data prendansi tre punti ad arbitrio  $A, B, C$ , e quindi si determinino i tre punti  $A', B', C'$  in modo che i rapporti anarmonici  $(EFAA')$ ,  $(EFBB')$ ,  $(EFC'C')$  siano tutti uguali al dato; e tre altri punti  $A'', B'', C''$  in modo che i segmenti  $AA'', BB'', CC''$  siano uguali al dato. Allora saranno (N° 61, 83 e) proiettive le punteggiate  $ABC \dots$ ,  $A'B'C' \dots$ , e proiettive anche (N° 77) le punteggiate  $ABC \dots$ ,  $A''B''C'' \dots$ , dunque proiettive eziandio le  $A'B'C' \dots$ ,  $A''B''C'' \dots$ . Se queste hanno due punti uniti, uno de' quali sia  $M'$  od  $M''$ , detto  $M$  il punto corrispondente ad esso nella punteggiata  $ABC \dots$ , il segmento  $MM'$  ed il rapporto anarmonico  $(EFMM')$  avranno le grandezze date, epperò il problema sarà risoluto.

g) Inscrivere in un triangolo dato  $PQR$  un rettangolo di area data (fig. 148<sup>a</sup>).

Se  $MSTU$  è il rettangolo cercato, conducendo  $MS'$  parallela a  $PR$ , si ottiene il parallelogrammo  $MSPS'$  equivalente al rettangolo; dunque possiamo trasformare il problema in quest'altro:

Trovare su  $QR$  un tal punto  $M$  che, tirate  $MS, MS'$  parallele rispettivamente a  $PQ, PR$ , risulti  $PS \cdot PS'$  uguale ad un quadrato dato  $k^2$ .

Preso ad arbitrio un punto  $A$  in  $QR$ , si tiri  $AD$  parallela a  $PQ$ , e prendasi in  $PQ$  la  $PD'$  tale che sia  $PD \cdot PD' = k^2$ ; tirisi poi la  $D'A'$  parallela a  $PR$ . Se i punti  $A, A'$  coincidessero, il problema sarebbe risoluto.

Variando insieme i punti  $A, D, D', A'$  descrivono altrettante punteggiate proiettive. Infatti, siccome  $D$  è la proiezione di  $A$  dal punto all'infinito di  $PQ$ , ed  $A'$  la proiezione di  $D'$  dal punto all'infinito di  $PR$ , così la seconda punteggiata è prospettiva alla prima e la quarta alla terza. E sono pur proiettive la seconda e la terza punteggiata, giacchè la relazione

$$PD \cdot PD' = k^2,$$

che lega insieme i punti  $D, D'$ , confrontata con quella ottenuta al N° 59 mostra che i punti  $D, D'$ , variando simultaneamente, descrivono due punteggiate proiettive, ai cui punti all'infinito corrisponde uno stesso punto  $P$  (1).

Tre tentativi, analoghi al suesposto, daranno tre coppie di punti come  $A, A'$ ; e quindi, costruiti i punti uniti, si otterranno le soluzioni del problema. Invece di prendere, ne' tre tentativi, il punto di partenza  $A$  del tutto ad arbitrio, gli si può dare qualche posizione particolare, che abbrevii le

(1) Cioè, dette  $u, u'$  le due punteggiate, riferite alla costruzione del N° 67 a sinistra, la punteggiata ausiliaria  $u''$  è tutta all'infinito. Ne segue che ottenuta una coppia  $D, D'$  di punti corrispondenti, per trovare il punto  $E'$  corrispondente ad un altro punto  $E$  di  $PR \equiv u$ , basta unire  $D'E$  e quindi tirare  $DE'$  parallela a  $D'E$ .

costruzioni. Questa riflessione vale per qualsiasi problema de' qui considerati; quanto all'attuale, si vede subito che, se  $A$  si porta a distanza infinita, va all'infinito anche la proiezione  $D$ , epperò il punto  $D'$  cade in  $P$ , donde segue che  $A'$  coinciderà con  $R$ ; e se il punto  $A$  si pone in  $Q$ , la proiezione  $D$  coincide con  $P$ , dunque  $D'$  epperò  $A'$  va all'infinito. Ecco pertanto due tentativi che non domandano alcuna costruzione: le coppie  $AA'$  che ne risultano sono  $R$  ed il punto all'infinito, il punto all'infinito e  $Q$ . Detta  $BB'$  la coppia data da un terzo tentativo, ed  $AA'$  una coppia qualsivoglia, avremo dunque (N° 59)

$$RA \cdot QA' = RB \cdot QB',$$

epperò, se  $M$  è un punto unito,

$$RM \cdot QM = RB \cdot QB'.$$

Di qui si possono cavare i punti uniti; ma sarà sempre più semplice ricorrere alla costruzione generale del N° 162, b); cioè per un punto  $O$  di una circonferenza descritta ad arbitrio, tirinsi  $OB$ ,  $OB'$ ,  $OR$ ,  $OQ$  e la parallela a  $QR$ , che seghino di nuovo il circolo in  $B_1$ ,  $B_1'$ ,  $R_1$ ,  $Q_1$ ,  $I$  (1); indi congiungasi il punto comune alle  $B_1Q_1$ ,  $B_1'I$  col punto comune alle  $B_1I$ ,  $B_1'R_1$ ; se la congiungente sega il circolo in due punti, le rette che li proiettano da  $O$  incontreranno  $QR$  ne' punti uniti cercati  $M$ ,  $N$ : i quali risolvono il problema.

k) Costruire un poligono i cui lati passino risp. per altrettanti punti dati, ed i cui vertici meno uno cadano su altrettante rette date, mentre l'angolo nell'ultimo vertice sia uguale ad un angolo dato.

Debbasi per es. costruire un triangolo  $LMN$  (fig. 149<sup>a</sup>), i cui tre lati  $MN$ ,  $NL$ ,  $LM$  debbano passare risp. per  $O$ ,  $U$ ,  $V$ , e due vertici  $M$ ,  $N$  debbano trovarsi sulle rette  $u$ ,  $v$ . Conducasi per  $O$  una retta ad arbitrio che seghi  $u$  in  $A$ ,  $v$  in  $B$ , e per  $U$  la retta  $UX$  che colla  $BV$  comprenda un angolo uguale al dato. Detto  $A'$  il punto in cui  $u$  è incontrata dalla  $UX$ , il problema sarebbe risoluto se i punti  $A$ ,  $A'$  coincidessero. Si otterranno le soluzioni del problema costruendo i raggi uniti de' fasci proiettivi generati dalla simultanea variazione delle rette  $OA$ ,  $OA'$ .

k) Nel precedente problema è compreso quest'altro:

Un raggio di luce parte da un punto dato  $O$  e si riflette successivamente su  $n$  rette date  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ; determinare la direzione che deve avere il raggio iniziale, affinchè l'ultimo raggio riflesso la seghi sotto angolo dato.

Infatti, secondo le leggi della riflessione, se il raggio incidente  $OA_1$  (fig. 150<sup>a</sup>) incontra  $u_1$  in  $A_1$ , il raggio riflesso ed il raggio incidente faranno angoli uguali (opposti) con  $u_1$ ; epperò, siccome il raggio incidente passa pel punto fisso  $O$ , così il raggio riflesso passerà costantemente per quel punto  $O_1$  che è simmetrico di  $O$  rispetto ad  $u_1$  (2). Analogamente, dopo che il primo raggio

(1) Di questi punti il solo  $I$  è segnato nella figura.

(2) Cioè un punto  $O_1$  tale che  $OO_1$  sia divisa per metà e ad angolo retto da  $u_1$ .

riflesso avrà incontrato  $u_2$  in  $A_2$ , si rifletterà secondo la stessa legge, epperò il secondo raggio riflesso passerà per un punto fisso  $O_2$ , che sarà il simmetrico di  $O_1$  rispetto ad  $u_2$ ; e così di seguito. Il raggio iniziale e gli  $n$  successivi raggi riflessi saranno pertanto i lati di un poligono  $A_1A_2A_3\dots$ ; del quale gli  $n+1$  lati devono passare per altrettanti punti dati  $O, O_1, O_2, \dots O_n$ , mentre un angolo  $A$  dev'essere uguale ad un dato, ed i vertici degli altri  $n$  angoli devono cadere sulle  $n$  rette date  $u_1, u_2, u_n$ .

l) **PROBLEMA.** — Costruire un poligono i cui vertici giacciono in rette date e i cui lati siano veduti da punti dati sotto angoli dati.

Si tratti per es. di costruire un triangolo i cui vertici 1, 2, 3 debbano cadere sulle date rette  $u_1, u_2, u_3$  ed i cui lati 23, 31, 12 siano veduti dai punti dati  $S_1, S_2, S_3$  sotto angoli dati  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Sulla  $u_1$  (fig. 151<sup>a</sup>) si prenda un punto  $A$  ad arbitrio; tirata la  $AS_3$ , si faccia l'angolo  $AS_3B$  uguale ad  $\omega_3$ . Il 2° lato di quest'angolo seghi  $u_2$  in  $B$ , e si faccia l'angolo  $BS_2C$  uguale ad  $\omega_2$ . Detto  $C$  il punto comune al 2° lato di quest'angolo e ad  $u_3$ , si faccia l'angolo  $CS_2A'$  uguale ad  $\omega_2$ . Il problema sarebbe risoluto, se il secondo lato  $S_2A'$  coincidesse con  $S_2A$ . Se facciamo variare  $S_2A$  intorno ad  $S_2$ , variano insieme gli altri raggi  $S_3A, S_3B, S_1B, S_1C, S_2C, S_2A'$ , generando altrettanti fasci, tutti proiettivi fra loro. Infatti: sono proiettivi i fasci generati da  $S_3A, S_3B$  (N° 82), perchè l'angolo  $AS_3B$  è costante; sono proiettivi i fasci generati da  $S_3B, S_1B$ , perchè prospettivi; e così di seguito. Le soluzioni del problema saranno adunque date dai raggi uniti de' fasci proiettivi concentrici generati da  $S_2A, S_2A'$ .

Nello stesso modo si risolve il problema, se gli angoli in  $S_1, S_2$ , in luogo di essere uguali ad angoli dati, debbano essere divisi da coppie di rette date, in modo che in ciascuno di quei punti si abbia un fascio di quattro raggi di rapporto anarmonico dato. Se per ciascuno de' punti dati  $S_1, S_2, \dots$  il fascio dovesse essere armonico, e i due raggi dati fossero ortogonali, il problema si potrebbe enunciare così (N° 52):

Costruire un poligono, i cui vertici debbano cadere su rette date e i cui lati debbano essere veduti da punti dati sotto angoli aventi bisettrici date.

m) Lo stesso metodo dà la soluzione del problema:

Costruire un poligono i cui lati debbano passare per punti dati e i cui angoli dividano segmenti dati secondo rapporti anarmonici dati (1);

Del quale si hanno casi particolari, supponendo che ciascun angolo debba intercettare sopra una retta data un segmento dato di grandezza e senso, o un segmento che risulti diviso da un punto dato in parti di rapporto dato (2).

(1) Cioè, i lati di un angolo incontrino una data retta, nella quale sono dati due punti  $A, B$ , in altri due punti  $C, D$ , in modo che il rapporto anarmonico  $(ABCD)$  sia un numero dato.

(2) Questi problemi sono tolti da CHASLES, *Géom. sup.*, pag. 219-23, e da TOWNSEND, *Chapters on the modern geometry* (Dublin 1865), v. 2, pag. 257-74.

## § 20. Poli e polari.

**186.** Dai N° 160, 161 risulta che, se  $S$  (fig. 120\*) è un punto situato comunque nel piano di una conica, condotte per  $S$  quante trasversali si vogliano a segare la curva nelle coppie di punti  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), \dots$ , le coppie di tangenti  $(a, a'), (b, b'), (c, c'), \dots$  si segano in punti di una retta fissa  $s$ , la quale contiene i punti di contatto delle tangenti che escono da  $S$ ; ed inoltre anche le coppie di congiungenti  $AB'$  ed  $A'B$ ,  $AC'$  ed  $A'C$ ,  $\dots$ ,  $BC'$  e  $B'C$ ,  $\dots$ ,  $AB$  ed  $A'B$ ,  $AC$  ed  $A'C$ ,  $\dots$ ,  $BC$  e  $B'C$ ,  $\dots$  si segano in punti di  $s$ . Si può osservare un'altra proprietà della retta  $s$ : considerando il quadrangolo completo  $AA'BB'$ , i due lati opposti  $AB$ ,  $A'B'$  sono separati armonicamente dal punto diagonale  $S$  e dalla retta  $s$  che unisce gli altri due (N° 49); dunque i punti  $A$  ed  $A'$  (ed analogamente  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ ,  $\dots$ ) sono separati armonicamente mediante  $S$  ed  $s$ .

La retta  $s$ , che è in tal modo individuata dal punto arbitrariamente dato  $S$ , dicesi polare di  $S$  rispetto alla conica; e viceversa  $S$  dicesi polo della retta  $s$ .

Dunque la retta polare di un dato polo  $S$  è ad un tempo: 1° il luogo del punto di concorso di due tangenti i cui punti di contatto siano in linea retta con  $S$ ; 2° il luogo dei punti di concorso delle coppie di lati opposti d'ogni quadrangolo inscritto, le cui diagonali passino per  $S$ ; 3° il luogo di un punto separato armonicamente da  $S$  mediante due punti della conica (1).

**187.** Reciprocamente, una retta  $s$  data ad arbitrio individua un punto  $S$ , del quale essa è la polare. Infatti: siano  $A, B$  due punti scelti ad arbitrio nella conica; le rette  $a, b$ , tangenti in  $A, B$ , segheranno  $s$  in due punti, dai quali si conducano le seconde tangenti  $a', b'$ ; e siano  $A', B'$  i loro punti di contatto, ed  $S$  il punto d'intersezione delle  $AA', BB'$ . Allora la polare di  $S$  conterrà i punti  $aa', bb'$ , epperò coinciderà con  $s$ . Dunque, se da un altro punto qualunque di  $s$  si possono condurre due tan-

(1) APOLLONIO, *l. c.*, lib. VII, 37; — DESARGUES, *l. c.*, p. 464 e seg. — DELAHIRE, *l. c.*, lib. I e II.



genti  $c, c'$ , la retta  $CC'$  congiungente i punti di contatto passerà per  $S$ .

a) Le rette  $aa'bb'$  formano un quadrilatero circoscritto, una diagonale del quale è  $s$ , mentre le altre due diagonali si segano in  $S$  (N° 135); dunque: se da un punto arbitrario di  $s$  si conducono due tangenti alla conica, queste sono separate armonicamente mediante  $s$  ed una retta che passa sempre per  $S$ .

b) Il quadrangolo completo  $AA'BB'$  ed il quadrilatero completo  $aa'bb'$  hanno lo stesso triangolo diagonale (N° 132), i vertici del quale sono  $S$ , il punto comune alle  $AB, A'B'$ , ed il punto comune alle  $AB', A'B$ ; ed i lati sono  $s$ , la congiungente i punti  $ab, a'b'$ , e la congiungente i punti  $ab', a'b$ . Dunque: se da due punti della retta  $s$  si guidano le coppie di tangenti  $(a, a'), (b, b')$ , le diagonali del quadrilatero circoscritto  $aba'b'$  passano pel punto  $S$ . Veggasi per es. la fig. 102<sup>a</sup> dove s'immaginino poste le lettere  $S, A', B', a', b'$  invece delle  $E, D, C, d, c$ , ovvero le lettere  $S, A', B, B', a', b, b'$  invece delle  $G, B, C, D, b, c, d$ .

188. Per tal modo, data una conica, ogni punto del piano ha la sua polare, ogni retta ha il suo polo (<sup>1</sup>). La conica data, rispetto alla quale si considerano i poli e le polari, dicesi conica fondamentale.

a) Un punto del piano di una conica si dice esterno od interno alla curva, secondo che per esso passino, o no, due tangenti. Dunque:

Se il polo è esterno alla conica (N° 160,  $d$ ), la polare sega la curva (ne' punti di contatto delle tangenti che escono dal polo).

Se il polo è interno alla conica, la polare non incontra la curva in alcun punto.

b) Se si assume come polo un punto della conica stessa, facendo girare intorno ad esso una trasversale, uno de' punti di segamento cade costantemente nel polo, epperò in ogni coppia di tangenti, il cui punto di concorso dee generare la polare, una tangente è sempre la tangente nel polo. Dunque, se il polo è un punto della conica, la polare è la tangente in questo punto.

c) Viceversa, se la polare ha tutt'i suoi punti esteriori alla co-

(<sup>1</sup>) DESARGUES, *L. c.*, p. 490.

nica, il polo è un punto interno; se la polare è una secante della curva, il polo è il punto comune alle rette che toccano questa ne' due punti d'intersezione; e se la polare è una tangente, il polo è il punto di contatto.

189. Sia  $E$  il polo ed  $F$  un punto della polare (fig. 102<sup>a</sup>). Se la retta  $EF$  sega la conica, le due intersezioni saranno separate armonicamente mediante i punti  $E, F$  (epperò di questi punti uno sarà interno, l'altro esterno alla curva), così che, se consideriamo invece  $F$  come polo, sarà  $E$  un punto della polare.

Se la retta  $EF$  non sega la conica, condotte le due tangenti da  $F$ , la corda di contatto passerà per  $E$ , appunto come la corda di contatto delle tangenti che escono da  $E$  passa per  $F$ , giacchè quest'ultima corda è la polare di  $E$ . Dunque:

Se  $F$  è un punto della polare di  $E$ , viceversa  $E$  è un punto della polare di  $F$ .

Lo stesso teorema si può esprimere col dire:

Se  $f$  è una retta che passi pel polo di un'altra retta  $e$ , viceversa  $e$  passerà pel polo di  $f$ .

Infatti, siano  $E, F$  i poli rispettivi di  $e, f$ ; siccome per ipotesi  $E$  è situato nella polare di  $F$ , così  $F$  giacerà nella polare di  $E$ , cioè  $e$  passerà per  $F$ , polo di  $f$ .

Due punti, come  $E$  ed  $F$ , l'uno de' quali sia nella polare dell'altro, diconsi *conjugati* o *reciproci* rispetto alla conica. E così pure, diconsi *conjugate* o *reciproche* due rette, come  $e, f$ , ciascuna delle quali passi pel polo dell'altra.

Dal teorema or ora dimostrato segue poi quest'altro enunciato:

Se due punti sono reciproci, anche le loro polari sono rette reciproche, o viceversa.

190. Il medesimo teorema si può anche porre sotto quest'altra forma:

Ogni punto della polare di un dato punto  $E$  ha per polare una retta che passa per  $E$ ;

Ogni retta passante pel polo di una data retta  $e$  ha per polo un punto di  $e$  <sup>(1)</sup>.

Vale a dire: se immaginiamo che un polo variabile  $F$  corra su di una data retta  $e$ , la polare di  $F$  passerà sempre per un punto

(1) DESARGUES, l. c., p. 494.

fisso  $E$ , che è il polo della retta data; e viceversa, se una retta  $f$  varia girando intorno ad un punto fisso  $E$ , il polo di  $f$  descriverà una linea retta  $e$ , che è la polare del punto dato  $E$ .

O ancora: si può dire che il polo di una data retta  $e$  è il centro del fascio delle polari dei punti di  $e$ ; e che la polare di un dato punto  $E$  è il luogo dei poli delle rette che passano per  $E$  (1).

**191.** Dato un polo  $S$ , se ne debba costruire la polare.

a) Se della conica sono dati cinque punti  $A, B, C, D, E$ , basterà tirare due trasversali  $SA, SB$ , e costruire i punti  $A', B'$ , in cui questi incontrano di nuovo la curva. La retta  $s$  che unisce il punto comune alle  $AB', A'B$  col punto comune alle  $AB, A'B'$  sarà la polare del punto dato (N° 169, fig. 136<sup>a</sup>).

b) La conica sia invece individuata da cinque tangenti  $a, b, c, d, e$  (fig. 153<sup>a</sup>). Conducansi per  $S$  due trasversali  $u, v$ , e trovinsi i poli  $U, V$  di queste. La retta  $UV$  sarà la polare di  $S$  (N° 190). Per maggior semplicità, converrà condurre la trasversale  $u$  pel punto  $ab$ ; costruita la tangente  $c'$  che passa pel punto  $uc$ , il polo  $U$  sarà il punto comune alle diagonali del quadrilatero  $acbc'$ . E così pure, condotta la trasversale  $v$ , per es. pel punto  $ac$ , e costruita la tangente  $b'$  che passa pel punto  $vb$ , il polo  $V$  sarà il punto comune alle diagonali del quadrilatero  $abcb'$ .

Data una retta  $s$ , se ne debba trovare il polo.

Se della conica sono date cinque tangenti  $a, b, c, d, e$ , basterà prendere i punti  $sa, sb$ , e da essi tirare le seconde tangenti  $a', b'$  (N° 124, a sinistra). Le diagonali del quadrilatero  $aba'b'$  si segheranno in un punto  $S$ , che è il polo della retta data (fig. 152<sup>a</sup>).

La conica sia invece individuata da cinque punti  $A, B, C, D, E$  (fig. 154<sup>a</sup>). Prendansi in  $s$  due punti  $U, V$ , e trovinsi le loro polari  $u, v$ . Il punto  $uv$  sarà il polo di  $s$  (N° 190). Per maggior semplicità, converrà prendere il punto  $U$  nella retta  $AB$ ; costruita l'intersezione  $C'$  della conica colla retta  $UC$ , la polare  $u$  sarà la congiungente de' punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo  $ACBC'$ . E così pure, preso il punto  $V$  per es. nella retta  $AC$ , e costruita l'intersezione  $B'$  della conica colla retta  $VB$ , la polare  $v$  sarà la congiungente de' punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo  $ABCB'$ .

**192.** Siano  $E, F$  due punti reciproci (fig. 102<sup>a</sup>) e sia  $G$  il polo della retta  $EF$ ; sarà  $G$  un punto reciproco sì a  $E$ , sì a  $F$ ; cioè, i tre punti  $EFG$  sono reciproci a due a due. Ne segue che ciascun lato del triangolo  $EFG$  è la polare del vertice opposto, e che i tre lati sono a due a due rette reciproche.

(1) PONCELET, l. c., N° 195.

Un triangolo, come  $EFG$ , nel quale ciascun vertice è il polo del lato opposto, dicesi triangolo conjugato alla conica.

**193.** Per costruire un triangolo conjugato, si può prendere un vertice  $E$  ad arbitrio (fig. 102<sup>a</sup>); indi si costruisca la polare di  $E$ , e in questa si assuma ad arbitrio un punto  $F$ ; da ultimo si costruisca la polare di  $F$ , la quale passerà per  $E$ , perchè  $EF$  sono punti reciproci. Sia  $G$  il punto in cui si segano le polari di  $E, F$ : saranno  $EG, FG$  coppie di punti reciproci, epperò  $EFG$  è un triangolo conjugato.

In altre parole, assunto ad arbitrio il punto  $E$ , si tirino per  $E$  due trasversali che seghino la conica in  $A$  e  $D, B$  e  $C$ ; sia  $F$  il concorso delle  $AC, BD$ ; e  $G$  il concorso delle  $AB, CD$ ; sarà  $EFG$  un triangolo conjugato.

Si potrebbe invece prendere ad arbitrio una retta  $e$ , costruirne il polo  $E$ , tirare per  $E$  una retta qualunque  $f$ ; e congiunti i poli di  $e, f$  mediante la retta  $g$ , sarebbe  $efg$  un triangolo conjugato, giacchè le rette  $e, f, g$  sono a due a due reciproche.

In altre parole, assumta ad arbitrio la retta  $e$ , prendansi in essa due punti dai quali partano le coppie di tangenti  $a$  o  $d, b$  e  $c$ ; sia  $f$  la congiungente de' punti  $ac, bd$ ; e  $g$  la congiungente de' punti  $ab, cd$ ; sarà  $efg$  un triangolo conjugato.

**194.** Le cose che precedono mettono in evidenza la seguente proprietà:

*a)* I punti diagonali del quadrangolo completo formato da quattro punti arbitrari della conica sono i vertici di un triangolo conjugato. Le rette diagonali del quadrilatero completo formato da quattro tangenti arbitrarie della conica sono i lati di un triangolo conjugato <sup>(1)</sup>.

Od anche:

I punti diagonali di un quadrangolo completo sono i vertici di un triangolo conjugato a tutte le coniche circoscritte al quadrangolo. Le rette diagonali di un quadrilatero completo sono i lati di un triangolo conjugato a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero.

*b)* Dalle proprietà dei quadrilateri circoscritti e dei quadrangoli inscritti (N<sup>o</sup> 129-135) si conclude inoltre (fig. 102<sup>a</sup>):

Se  $EFG$  è un triangolo conjugato ad una conica data, e se  $ABC$  è un triangolo inscritto nella medesima, i cui lati  $AB, AC$  passino rispettivamente pei vertici  $G, F$ , il terzo lato  $BC$  passerà pel terzo vertice  $E$ ; e ciascun lato

<sup>(1)</sup> DESARGUES, *I. c.*, p. 186.

del triangolo inscritto sarà diviso armonicamente dal corrispondente vertice del triangolo conjugato e dalla retta che unisce gli altri due vertici.

Le tre rette  $EA, FB, GC$  concorrono in un punto  $D$  della curva: ne segue che i due triangoli sono omologici, epperò le tre coppie di rette  $FG$  e  $BC$ ,  $GE$  e  $CA$ ,  $EF$  ed  $AB$  si segheranno in tre punti in linea retta.

Si lascia allo studioso di enunciare la proposizione correlativa (\*).

**195.** De' tre vertici di un triangolo conjugato  $EFG$  uno è sempre interno alla curva e gli altri due esterni. Infatti, se  $E$  è un punto interno, la polare di  $E$  non sega la conica, epperò  $F$  e  $G$  sono punti esterni; e se  $E$  è un punto esterno, la polare di  $E$  sega la curva, i punti di segamento sono separati armonicamente mediante  $F$  e  $G$ , epperò l'uno di questi punti sarà interno e l'altro esterno.

Da questa proprietà e da quelle del N° 188 si conclude tosto che dei tre lati di un triangolo conjugato due segano sempre la conica, ed uno non la incontra.

**196.** Due quadrangoli completi  $ABCD, A'B'C'D'$  abbiano gli stessi punti diagonali  $E, F, G$ ; cioè concorrano

$$\begin{aligned} BC, AD, B'C', A'D' &\text{ in } E, \\ CA, BD, C'A', B'D' &\text{ in } F, \\ AB, CD, A'B', C'D' &\text{ in } G. \end{aligned}$$

Se il punto  $A'$  giacesse per es. in  $AB$ , siccome  $A'B$  ed  $AB$  passano per  $G$ , così anche  $B$  sarebbe situato in  $AB$ ; e siccome  $AB$  od  $A'B$  dev'essere separata armonicamente da  $CD$  e anche da  $C'D'$  mediante le  $GE, GF$ , così i punti  $CDC'D'$  sarebbero in una sola retta, vale a dire gli otto punti  $ABCD A'B'C'D'$  sarebbero in due rette (fig. 155\*).

Escluso questo caso, supposto cioè che pei cinque punti  $ABCD A'$  si possa descrivere una conica, dico che essa contiene anche i punti  $B'C'D'$  (fig. 156\*). Infatti, essendo  $G$  il polo di  $EF$  (perchè  $E, F, G$  sono i punti diagonali del quadrangolo inscritto  $ABCD$ ), le due intersezioni della conica colla trasversale  $GAB$  saranno separate armonicamente mediante il polo  $G$  e la polare  $EF$ . Ma una di queste intersezioni è  $A'$ , dunque l'altra è  $B'$ ; giacchè, essendo  $E, F, G$  i punti diagonali del quadrangolo  $A'B'C'D'$ , i punti  $A'B'$

(\*) PONCELET, l. c., p. 104.

sono separati armonicamente mediante  $G$  ed  $EF$ . Nello stesso modo si dimostra che anche i punti  $C, D$  appartengono alla conica. Dunque:

Se due quadrangoli completi hanno gli stessi punti diagonali, gli otto vertici sono situati o in due rette o in una conica.

Siccome le rette  $AB, A'B'$  concorrono in  $G$ , così le  $AA', BB'$ , come pure le  $AB', A'B$  si segheranno sulla  $EF$ , polare di  $G$ . Quest'osservazione dà il modo di costruire il punto  $B'$ , quando siano dati  $ABCD A'$ . Poi, il punto  $C'$  si otterrà come intersezione delle  $A'F, B'E$ ; ed il punto  $D'$  come intersezione delle  $B'F, A'E, C'G$ .

197. Suppongo ora che due coniche abbiano quattro tangenti comuni  $abcd$ , vale a dire, siano inscritte in uno stesso quadrilatero, e siano  $ABCD$  i quattro punti di contatto per l'una,  $A'B'C'D'$  i quattro punti di contatto per l'altra. In virtù del teorema del N° 132, il triangolo formato dalle diagonali del quadrilatero circoscritto  $abcd$  avrà i vertici ne' punti diagonali del quadrangolo inscritto  $ABCD$ , ed anche ne' punti diagonali del quadrangolo  $A'B'C'D'$ ; dunque i due quadrangoli  $ABCD, A'B'C'D'$  hanno gli stessi punti diagonali. Quindi, pel teorema che precede (N° 196), gli otto punti  $ABCD A'B'C'D'$  saranno tutti in due rette o in una conica.

198. Col solito scambio dei punti colle rette si potranno dimostrare le proposizioni correlative, cioè:

Se due quadrilateri completi hanno le tre diagonali confuni, gli otto lati o passano per due punti (quattro per l'uno e quattro per l'altro) o sono tangenti di una stessa conica.

Se due coniche si segano in quattro punti, le otto tangenti in questi punti o passano tutte per due punti (quattro per l'uno e quattro per l'altro) o sono tangenti di una stessa conica (\*).

199. Se di un quadrangolo  $ABCD$  sono dati i punti diagonali  $EFG$  ed un vertice  $A$ , il quadrangolo è individuato (determinato ed unico) e può subito essere costruito. Infatti,  $D$  è quel punto di  $AE$  che è separato armonicamente da  $A$  mediante  $E$  ed

(\*) STAUDT, I. c., N° 293.

$FG$ ; così  $C$  è quel punto di  $AF$  che è separato armonicamente da  $A$  mediante  $F$  e  $GE$ ; e  $B$  è quel punto di  $AG$  che è separato armonicamente da  $A$  mediante  $G$  ed  $EF$ .

Siccome d'altra parte, avendo una conica ed un triangolo conjugato  $EFG$ , si può prendere ad arbitrio (nella curva) un punto  $A$  come vertice di un quadrangolo inscritto  $ABCD$ , i cui punti diagonali siano  $E, F, G$  (gli altri vertici  $B, C, D$  sono le seconde intersezioni della conica colle rette  $AE, AF, AG$ ), così ne risulta che:

Tutte le coniche passanti per un punto dato  $A$ , per le quali un dato triangolo  $EFG$  sia conjugato, passano per tre altri punti determinati  $B, C, D$ .

**200.** Il problema « costruire la conica che passa per due punti dati  $A, A'$  e per la quale un dato triangolo  $EFG$  sia conjugato » si risolverà pertanto nel modo che segue:

Si costruiranno nel modo sopradetto i tre punti  $B, C, D$  che con  $A$  formano un quadrangolo completo avente i punti diagonali  $E, F, G$ . Allora si conosceranno cinque punti della curva  $AA'BCD$ , epperò si potrà trovarne altri col teorema di PASCAL. Del resto, si potrebbero costruire i tre punti  $B'CD'$  che con  $A'$  formano un quadrangolo coi punti diagonali  $E, F, G$ ; e gli otto punti  $ABCD A'BCD'$  apparterranno tutti alla conica cercata.

**201.** Supponiamo che si tratti di descrivere una conica che tocchi quattro rette date  $abcd$  e passi per un punto dato  $S$  (fig. 157\*). Le diagonali del quadrilatero  $abcd$  formano un triangolo  $EFG$  conjugato alla conica; epperò, se si costruiscono i tre punti  $PQR$  che insieme con  $S$  formano un quadrangolo, i cui punti diagonali siano  $EFG$ , i tre punti così costruiti apparterranno alla conica domandata. Ma, o non esiste alcuna conica che soddisfaccia alla quistione, o ve ne sono due (N° 170, a destra); dunque, in questo secondo caso, siccome la costruzione dei punti  $PQR$  è lineare, così entrambe le coniche passeranno per questi punti. Ossia:

Se due coniche inscritte in uno stesso quadrilatero  $abcd$  hanno un punto comune  $S$ , esse si segano in altri tre punti  $PQR$ ; e il triangolo formato dalle diagonali del quadrilatero circoscritto  $abcd$  coincide con quello formato dai punti diagonali del quadrangolo inscritto  $PQRS$ .

Per la costruzione dei punti  $PQR$ , per es. del punto  $P$  che è nella retta  $ES$  (fig. 157\*), osservo che i punti  $PS$  devono essere separati armonicamente per mezzo di  $E$  ed  $FG$ ; ma anche la diagonale  $(ab)(cd)$ , che passa per  $E$ , è divisa armonicamente in  $E, F$ ; abbiamo dunque due forme armoniche, che sono prospettive a cagione del punto unito  $E$ ; perciò le rette  $P(ab), S(cd), FG$  congiungenti le altre coppie di punti corrispondenti concorreranno in uno

stesso punto (N° 43, 62). Dunque si congiungerà  $S$  ad un termine di una delle diagonali passanti per  $E$ , per es. al punto  $cd$ ; la congiungente incontrerà  $FG$  in un punto che si unirà all'altro estremo della stessa diagonale, cioè al punto  $ab$ , mediante una retta che segnerà  $ES$  nel punto cercato  $P$  (1).

**202.** Le proposizioni correlative, sulle quali il giovane studente farà bene ad esercitarsi, sono:

Tutte le coniche tangenti ad una retta data, per le quali un dato triangolo sia conjugato, toccano tre altre rette determinate.

Costruire la conica che tocca due rette date e per la quale un dato triangolo è conjugato.

Se due coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo hanno una tangente comune, esse hanno tre altre tangenti comuni.

Costruire le tre tangenti comuni alle due coniche che passano per quattro punti dati e toccano una retta data (N° 170, a sinistra).

**203.** Abbiassi un quadrangolo completo  $ABCD$ , i cui punti diagonali siano  $EFG$  (fig. 159\*). Siano poi

$L, P$	i punti in cui $FG$ incontra $AD, BC$ ,
$M, Q$	» $GE$ » $BD, CA$ ,
$N, R$	» $EF$ » $CD, AB$ .

I sei punti così ottenuti sono i vertici di un quadrilatero completo; infatti il triangolo  $EFG$  è omologico a ciascuno de' seguenti:  $ABC, DCB, CDA, BAD$ , i centri d'omologia essendo ordinatamente  $D, A, B, C$ . Ne segue che le terne di punti  $PQR, PMN, LQN, LMR$  sono in altrettante rette (assi d'omologia).

Queste quattro rette formano un quadrilatero, le cui diagonali  $LP, MQ, NR$  formano il triangolo  $EFG$ . Ne segue che la conica inscritta nel quadrangolo  $ABCD$  e passante per  $L, P, R$  (N° 201); e così pure vi è una conica inscritta nel quadrangolo  $ABDC$ , la quale passa per  $R, M, N, Q$ ; ed un'altra inscritta nel quadrangolo  $ACBD$  e passante per  $Q, P, M, L$ .

Per ciascuna di queste coniche le quattro tangenti date dalla figura (quattro lati del quadrangolo completo  $ABCD$ ) sono armoniche, epperò sono armonici anche i quattro punti di contatto (N° 111, 161). Infatti, se consideriamo un lato qualunque del quadrangolo suddetto, per es.  $AB$ , questo è diviso armonicamente ne' punti  $R, G$  (come si deduce dalla considerazione del quadrangolo completo  $CDEF$ ); i punti  $A, B, G$  sono le intersezioni della tan-

(1) BRIANCHON, *L. c.*, p. 43.

(1) MACLAURIN, *De lin. geom.*, § 43.



gente  $AB$  colle altre tre, mentre  $R$  è il punto di contatto della prima tangente; dunque le quattro tangenti saranno incontrate da qualunque altra tangente della conica che si considera in quattro punti armonici <sup>(1)</sup>.

Se  $ABCD$  è un parallelogrammo, i punti  $E, G, M, Q$  vanno all'infinito; ed anche  $LNPR$  risulta un parallelogrammo. Delle tre coniche sunnominate, la 1<sup>a</sup> sarà in questo caso un'ellisse tangente ai lati del parallelogrammo  $ABCD$  ne' loro punti di mezzo; la 2<sup>a</sup> un'iperbole tangente ai lati  $AB, CD$  ne' loro punti di mezzo ed avente gli assintoti  $AC, BD$ ; la 3<sup>a</sup> un'iperbole cogli stessi assintoti e tangente ai lati  $AD, BC$  ne' loro punti di mezzo.

**204.** Dal corollario del teorema di BRIANCHON, relativo ad un quadrilatero circoscritto (N° 135) già si dedusse (N° 136) la regola per costruire le tangenti di una conica, della quale siano date tre tangenti  $a, b, c$  e due punti di contatto  $B$  e  $C$  (fig. 102<sup>a</sup>). Un punto qualunque  $E$  di  $BC$  si congiunga ai punti  $ab, ac$ ; le congiungenti  $g, f$  incontrano risp.  $c, b$  in due punti che uniti danno una tangente  $d$  della conica.

Le quattro tangenti  $abcd$  formano un quadrilatero completo, due diagonali del quale  $g = (ab)(cd)$ ,  $f = (ac)(bd)$  concorrono in  $E$ ; dunque (N° 135) in  $E$  si segherà colla  $BC$  anche la corda di contatto  $AD$  delle tangenti  $a, d$ . Le rette condotte da  $E$  ai punti  $ab, ac$ , essendo due diagonali del predetto quadrilatero, sono rette reciproche; dunque (fig. 160<sup>a</sup>):

Se un triangolo  $abc$  è circoscritto ad una conica, le rette che da un punto qualunque  $E$  della polare di un vertice  $bc$  vanno agli altri due vertici  $(ab), (ac)$  sono rette reciproche.

O viceversa: Se due rette date toccano una conica, due rette reciproche uscenti da un punto qualunque della corda di contatto segano le due tangenti date in punti che appartengono ad una terza tangente.

**205.** Esponiamo ora la proprietà correlativa. Di una conica siano dati tre punti  $A, B, C$  e le tangenti  $b, c$  in due di essi (fig. 102<sup>a</sup>). Una retta  $e$  condotta ad arbitrio pel punto  $bc$  incontri  $AB, AC$  in due punti  $G, F$ , uniti i quali risp. a  $C, B$ , le congiungenti si segano in un punto  $D$  della conica.

I quattro punti  $ABCD$  formano un quadrangolo completo, due punti diagonali  $G, F$  del quale sono in  $e$ ; dunque (N° 129) in  $e$

<sup>(1)</sup> STEINER, l. c., p. 160. — STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856-57-60), N° 329.

cadrà insieme col punto  $bc$  anche il punto comune alle tangenti in  $A, D$ . I punti  $G, F$ , essendo due punti diagonali del quadrangolo anzi detto, sono reciproci; dunque (fig. 160<sup>a</sup>):

Se un triangolo  $ABC$  è inscritto in una conica, i punti  $F, G$ , in cui due lati  $AB, AC$  sono incontrati da una retta condotta ad arbitrio pel polo  $S$  del terzo lato, sono reciproci.

O viceversa: Se due punti dati in una conica si congiungono a due punti reciproci, i quali siano in linea retta col polo della corda che congiunge i punti dati, le congiungenti s'incontrano in un punto della curva.

## § 21. Centro e diametri.

**206.** Se si assume come polo un punto a distanza infinita (fig. 161<sup>a</sup>) e si conduca pel polo una trasversale a segare la conica in due punti  $A, A'$ , questi saranno separati armonicamente mediante il polo ed un punto della polare (N° 186); il punto della polare sarà adunque il mezzo del segmento  $AA'$ ; vale a dire:

Se in una conica si conducano quante corde si vogliono, fra loro parallele, il luogo de' loro punti di mezzo è una retta, che è la polare del punto all'infinito comune alle corde (1).

A questa retta si dà il nome di diametro relativo alle corde che divide per metà. Se il diametro incontra la conica in due punti, questi saranno i punti di contatto delle tangenti dirette al polo, cioè delle tangenti parallele alle corde bisecate. Se negli estremi  $A, A'$  di una di queste corde si tirano le tangenti, queste concorreranno in un punto del diametro. Se  $AA', BB'$  sono due delle corde bisecate, le rette  $AB, A'B'$ , ed anche le  $AB', A'B$  si segheranno sul diametro (N° 186).

Viceversa, se da un punto del diametro si possono condurre due tangenti  $a, a'$  alla conica, la corda  $AA'$  di contatto sarà bisecata dal diametro; e se dal punto stesso si conduce la retta che insieme col diametro separa armonicamente le due tangenti, codesta retta sarà parallela alle corde bisecate. Se da due punti del diametro si conducono due coppie di tangenti  $a$  ed  $a', b$  e  $b'$ , la retta che con-

(1) APOLLONIO, *Conic.*, 1, 46, 47, 48; 11, 5, 6, 7, 28, 29, 30, 34, 34-37.

giunge i punti  $ab$ ,  $a'b'$  e la retta che congiunge i punti  $ab'$ ,  $a'b$  saranno pur esse parallele alle corde bisecate (N° 187).

**207.** Ad ogni punto all'infinito, cioè ad ogni fascio di corde parallele corrisponde un diametro. Tutt'i diametri passano per uno stesso punto, perchè essi sono le polari dei punti di una stessa retta, cioè della retta all'infinito: il punto di concorso de' diametri è il polo della retta all'infinito (N° 190).

**208.** Siccome la parabola è toccata dalla retta all'infinito, epperò il punto di contatto è il polo di questa retta (N° 188), così tutt'i diametri della parabola sono fra loro paralleli (diretti al punto all'infinito); e viceversa ogni retta, la quale segghi la parabola all'infinito, è un diametro.

**209.** Se  $S$  è un punto qualunque dal quale si possano condurre due tangenti  $a$ ,  $a'$  alla conica (fig. 161<sup>a</sup>), la corda di contatto  $AA'$ , ossia la polare di  $S$ , sarà bisecata in  $R$  dal diametro passante per  $S$ ; giacchè  $S$  ed il punto all'infinito di  $AA'$  sono punti reciproci. Se il diametro sega la curva in  $M$ ,  $M'$ , le tangenti in questi punti sono parallele ad  $AA'$ , ed i punti stessi sono separati armonicamente mediante il polo  $S$  e la polare  $AA'$  (N° 186).

Dunque, se la conica è una parabola (fig. 162<sup>a</sup>), nel qual caso il punto  $M'$  va all'infinito, il punto  $M$  sarà il punto di mezzo del segmento  $SR$ , vale a dire:

La retta che dal punto di mezzo di una corda della parabola va al polo di questa corda è divisa per metà dalla curva (<sup>1</sup>).

**210.** Qualora la conica non sia una parabola, la retta all'infinito non è più una tangente della curva, epperò il polo di quella retta, ossia il punto di concorso de' diametri, è un punto a distanza finita. Siccome due punti della conica allineati col polo sono sempre separati armonicamente per mezzo del polo e della polare (N° 186), così se la polare è all'infinito, il polo è il punto di mezzo fra i due punti della curva. Dunque ogni corda della conica passante pel polo della retta all'infinito è divisa per metà in questo punto.

A cagione di questa proprietà, al polo della retta all'infinito, ossia al punto di concorso dei diametri, si dà il nome di centro della conica.

(<sup>1</sup>) APOLLONIO, l. c., I, 35.

Applicando al centro ed alla retta all'infinito le proprietà generali del polo e della polare (N° 186, 187), avremo (fig. 163<sup>a</sup>):

Se  $A, A'$  sono due punti della conica allineati col centro, le tangenti in  $A, A'$  sono parallele;

Se  $AA', BB'$  sono due coppie di punti della conica allineati col centro, le rette  $AB, A'B'$  sono parallele, e sono pur parallele le  $AB', A'B$ , cioè  $ABA'B'$  è un parallelogrammo.

Se  $a, a'$  sono due tangenti parallele, la loro corda di contatto e la retta che divide per metà la striscia  $aa'$  passano pel centro;

Se  $aa', bb'$  sono due coppie di tangenti parallele, la retta che congiunge i punti  $ab, a'b'$  e la retta che congiunge i punti  $ab', a'b$  passano pel centro; vale a dire, se  $aba'b'$  è un parallelogrammo circoscritto, le diagonali si segano nel centro.

**211.** Se la conica è un'iperbole, la retta all'infinito sega la curva; epperò (N° 188) il centro è un punto esterno, nel quale concorrono le tangenti ne' punti all'infinito, ossia gli assintoti (fig. 170<sup>a</sup>).

Se la conica è un'ellisse, la retta all'infinito non incontra la curva, epperò il centro è un punto interno (fig. 163<sup>a</sup>, 164<sup>a</sup>).

**212.** Due diametri della conica (ellisse od iperbole <sup>(1)</sup>) diconsi coniugati se sono rette reciproche, cioè se l'uno passa pel polo dell'altro, epperò l'altro passi pel polo del primo (N° 189). Siccome il polo di un diametro è il punto all'infinito delle corde da questo bisecate, così ne segue che, dato un diametro  $b$  (fig. 164<sup>a</sup>), il suo diametro coniugato  $b'$  è parallelo alle corde bisecate da  $b$ , e viceversa  $b'$  divide per metà le corde parallele a  $b$  <sup>(2)</sup>.

Due diametri coniugati e la retta all'infinito sono i lati di un triangolo coniugato (N° 192), de' cui vertici uno è il centro, gli altri sono all'infinito.

Siccome in un triangolo coniugato, due lati segano la curva e il terzo non la sega (N° 195), e siccome la retta all'infinito è segante per l'iperbole, ma non già per l'ellisse, così di due diametri coniugati dell'iperbole ve n'ha sempre uno (e uno solo) che sega la curva; mentre l'ellisse è segata da tutt'i suoi diametri.

**213.** Dati cinque punti  $ABCDE$  di una conica, trovarne il centro.

Non si ha che a ripetere la costruzione data al N° 191,  $b$ ) a destra, nella

(<sup>1</sup>) Nella parabola non ci sono coppie di diametri coniugati, perchè avendosi un punto all'infinito invece del centro, il diametro parallelo alle corde bisecate da un diametro dato coincide sempre colla retta all'infinito. (<sup>2</sup>) APOLLONIO, I. c., II, 20.

quale si supponga la retta  $s$  all'infinito. Vale a dire: si trovi il punto  $C$  ove la conica è incontrata di nuovo dalla parallela ad  $AB$  condotta per  $C$ , ed il punto  $B'$  ove la conica è incontrata di nuovo dalla parallela ad  $AC$  condotta per  $B$ ; la retta  $u$  che unisce i punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo  $ACBC'$  e la retta  $v$  che unisce i punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo  $ABCB'$  si segheranno nel punto cercato  $O$ : il polo della retta all'infinito, ossia il centro della conica.

Le rette  $u, v$  sono i diametri risp. coniugati ad  $AB, AC$ ; conducendo per  $O$  la  $u'$  parallela ad  $AB$ , e la  $v'$  parallela ad  $AC$ , saranno  $uu'$  e  $vv'$  due coppie di diametri coniugati.

Se la conica è data per mezzo di cinque tangenti, si vedrà più innanzi (N° 229) come se ne trovi il centro.

**214.** Quattro tangenti di una conica formano un quadrilatero completo, le cui diagonali sono i lati di un triangolo coniugato (N° 194). Supponiamo che le quattro tangenti siano a due a due parallele (fig. 163°); una diagonale sarà all'infinito; perciò le altre due sono diametri coniugati (N° 212); dunque:

In ogni parallelogrammo circoscritto ad una conica, le diagonali sono due diametri coniugati.

I punti di contatto delle quattro tangenti formano un quadrangolo completo, i cui punti diagonali sono i vertici dello stesso triangolo coniugato dianzi accennato (N° 132, 194). Per questo quadrangolo un punto diagonale è il centro, e gli altri due sono all'infinito; cioè i sei lati del quadrangolo sono i lati e le diagonali di un parallelogrammo inscritto; i lati sono a due a due paralleli alle diagonali del parallelogrammo circoscritto; e le diagonali si segano nel centro.

**215.** Viceversa, se immaginiamo (fig. 163°) un parallelogrammo inscritto qualunque  $ABA'B'$ , e lo consideriamo come un quadrangolo completo, siccome i suoi tre punti diagonali devono essere i vertici di un triangolo coniugato, così l'un d'essi sarà il centro della conica e gli altri due saranno i punti all'infinito di due diametri coniugati; dunque:

In ogni parallelogrammo inscritto in una conica, i lati sono paralleli a due diametri coniugati e le diagonali si segano nel centro. Ossia:

Due corde congiungenti un punto variabile  $A$  della conica ai termini di un diametro dato  $BB'$  sono sempre parallele a due diametri coniugati.

**216.** Dal teorema del N° 214 si deduce tosto:

Due tangenti parallele ( $a, a'$ ) sono incontrate da due diametri coniugati in quattro punti che uniti danno due altre tangenti parallele ( $b, b'$ ).

Se dai termini ( $A, A'$ ) di un diametro si conducono rette parallele a due diametri coniugati, queste concorrono in due punti della curva, che uniti danno un altro diametro.

Date due tangenti parallele  $a, a'$ , i cui punti di contatto siano  $A, A'$ , ed una terza tangente  $b$ , se da  $A$  si conduce la parallela al diametro che passa pel punto  $a'b$ , e da  $A'$  la parallela al diametro che passa pel punto  $ab$ , quelle due rette concorreranno nel punto  $B$ , ove  $b$  tocca la conica.

Date due tangenti parallele  $a, a'$ , i loro punti di contatto  $A, A'$  ed un altro punto  $B$  della conica, la tangente in  $B$  segnerà  $a$  in un punto situato nel diametro parallelo ad  $A'B$ , ed  $a'$  in un punto situato nel diametro parallelo ad  $AB$ .

**217.** Suppongasi ora che la conica sia un cerchio (fig. 165\*), cioè sia il luogo del vertice di un angolo retto  $AMB$  i cui lati  $AM, BM$  ruotino intorno a due punti fissi  $A, B$ . Questi lati mobili generano due fasci uguali, epperò proiettivi; dunque la tangente in  $A$  sarà quel raggio del primo fascio che corrisponde al raggio  $BA$  del secondo (N° 107). La tangente in  $A$  deve dunque fare con  $BA$  un angolo retto; e similmente la tangente in  $B$  sarà perpendicolare ad  $AB$ . Dall'essere le tangenti in  $A$  e  $B$  rette parallele, segue che  $AB$  è un diametro e che il punto  $O$ , mezzo di  $AB$ , è il centro della conica (N° 210).

Poichè  $AB$  è un diametro, le rette  $AM, BM$  avranno, per ogni posizione di  $M$ , la direzione di due diametri coniugati (N° 215); dunque due diametri coniugati del cerchio sono sempre fra loro perpendicolari.

Le diagonali d'ogni parallelogrammo circoscritto al cerchio, dovendo essere due diametri coniugati, si segheranno ad angolo retto; dunque ogni parallelogrammo circoscritto al cerchio è un rombo. In un rombo la distanza di due lati opposti è uguale alla distanza degli altri due lati; perciò se nel comporre il rombo circoscritto, teniamo fissi due lati opposti, e facciamo variare gli altri due, potremo concludere che la distanza di due tangenti parallele è costante. La distanza di due tangenti parallele è la retta che ne

unisce i punti di contatto, giacchè questa retta, che è un diametro, sega ad angolo retto il diametro conjugato e le tangenti parallele a questo; dunque: tutt'i diametri sono uguali.

Le diagonali d'ogni parallelogrammo inscritto sono diametri; ma i diametri sono tutti uguali; dunque tutt'i parallelogrammi inscritti sono rettangoli.

218. Qualunque sia la conica (fig. 161\*), se  $s$  è una retta arbitraria il cui polo sia  $S$ , le corde parallele ad  $s$  saranno bisecate dal diametro passante per  $S$ ; giacchè essendo  $S$  ed il punto all'infinito di  $s$  punti reciproci, la polare del secondo punto deve passare pel primo. Possiamo anche dire:

Il diametro conjugato a quello che passa per un dato punto è parallelo alla polare di questo punto.

a) Se il diametro per  $S$  sega la conica in due punti  $M, M'$ , questi saranno separati armonicamente mediante il polo  $S$  e la polare  $s$  <sup>(1)</sup>; dunque, detto  $O$  il punto di mezzo di  $MM'$ , ossia il centro della conica, ed  $R$  il punto in cui cotesto diametro sega la polare  $s$ , avremo (N° 55, b):

$$OS \cdot OR = \overline{OM}^2$$

b) Di qui segue una costruzione del semidiametro conjugato alla corda  $AA'$  di una conica, della quale siano dati altri tre punti. Si trovi il centro  $O$  (N° 213) e si congiunga al punto di mezzo  $R$  di  $AA'$ ; si costruisca la tangente in  $A$ , la quale incontri  $OR$  in  $S$  e si prenda  $OM$  media proporzionale fra  $OR, OS$ ; sarà  $OM$  il semidiametro cercato.

Se  $O$  si trova fra  $R$  ed  $S$ , sicchè  $OR, OS$  siano di segni opposti, il diametro  $OR$  non incontra la curva. Ma anche in tal caso, la lunghezza  $OM$ , media proporzionale fra  $OR, OS$ , si denomina grandezza del semidiametro conjugato alla corda  $AA'$ .

Un'analoga definizione si può dare per una retta qualsivoglia (N° 223).

c) Se la conica è un cerchio, a cagione dell'ortogonalità de' diametri conjugati (N° 217), avremo:

La polare di un punto qualunque rispetto al cerchio è perpendicolare al diametro che passa pel polo.

(1) APOLLONIO, I. c., I, 34, 36, II. 29, 30.

**219.** Da quest'ultima proprietà si può cavare un importantissimo teorema. Si considerino i punti  $A, B, C, \dots$  di una retta punteggiata  $s$  come poli (fig. 166°); i diametri  $O(A, B, C, \dots)$  che li proiettano dal centro  $O$  della conica formeranno un fascio prospettivo alla punteggiata. Un altro fascio è costituito dalle rette  $a, b, c, \dots$  polari di  $A, B, C, \dots$ , giacchè queste (N° 190) passano tutte per uno stesso punto  $S$ , che è il polo di  $s$ ; e siccome, per l'anzidetta proprietà (supposta la conica essere un cerchio), le rette  $O(A, B, C, \dots)$  sono ordinatamente perpendicolari alle  $a, b, c, \dots$ , così i due fasci sono uguali. Ne segue che la punteggiata dei poli  $ABC \dots$  è proiettiva al fascio delle polari  $abc \dots$

Questa conclusione non è vera soltanto pel cerchio, ma eziandio per tutte le coniche. Infatti, una conica data qualsivoglia può sempre essere considerata come proiezione di un cerchio (N° 113, 114); nella proiezione le forme armoniche corrispondono a forme armoniche (N° 43), epperò ad un punto ed alla sua polare rispetto alla conica corrisponderanno un punto e la sua polare rispetto al cerchio, o viceversa. Ad una punteggiata di poli ed al fascio delle polari rispetto alla conica corrisponderanno una punteggiata di poli ed il fascio delle polari rispetto al cerchio; ma questa punteggiata e questo fascio sono proiettivi; dunque:

La punteggiata costituita da un numero qualunque di poli in linea retta ed il fascio delle rette polari, rispetto ad una conica data, sono due forme proiettive (1).

**220.** Siano  $A, B, C \dots$  punti di una retta  $s$  (fig. 167°);  $a, b, c \dots$  le loro polari, le quali sono rette incrociate in un punto fisso  $S$ , polo di  $s$ ; e siano  $A', B', C', \dots$  i punti in cui  $s$  è incontrata dalle  $a, b, c, \dots$ . Siccome  $A$  ed  $A'$  sono punti reciproci, così la polare di  $A'$  passerà per  $A$ , e precisamente essa sarà la retta  $SA$ , giacchè  $S$  è reciproco ad ogni punto di  $s$ . Il fascio  $abc \dots$  è (N° 220) proiettivo alla punteggiata  $ABC \dots$  e prospettivo alla punteggiata  $A'B'C' \dots$ ; dunque, queste due punteggiate sono proiettive. Ma in queste due punteggiate, due punti come  $A, A'$  si corrispondono in doppio modo; infatti, se consideriamo  $A'$  come punto della prima punteggiata, la sua polare (che è  $SA$ ) sega la retta  $s$  nel punto  $A$ . Dunque (N° 93) le coppie di punti reciproci  $AA' \cdot BB' \cdot CC' \dots$

(1) MÖBIUS, *l. c.*, p. 445.



sono in involuzione (<sup>1</sup>). Se l'involuzione ha due punti doppi, uno de' quali sia  $M$ , sarà  $M$  un punto reciproco a sè stesso, vale a dire un punto tale che la sua polare passi pel polo stesso; dunque  $M$  sarà (N° 188) un punto della curva, ed  $SM$  sarà la tangente in esso punto.

Anche le coppie di rette  $aa' . bb' . cc' \dots$ , polari dei punti  $AA' . BB' . CC' \dots$  costituiscono un'involuzione, sia in virtù del teorema del N° 219, sia perchè quelle rette nascono dal proiettare questi punti da  $S$ ; dunque (<sup>2</sup>):

Una retta data ad arbitrio (che non sia tangente alla conica) contiene infinite coppie di punti reciproci, le quali costituiscono un'involuzione. Se la retta sega la conica, le due intersezioni sono i punti doppi dell'involuzione. Il punto centrale dell'involuzione è situato nel diametro che passa pel polo della retta data (N° 218).

Per un punto arbitrario (che non sia situato nella conica) passano infinite coppie di rette reciproche, le quali costituiscono un'involuzione.

Se il punto è esterno alla curva, le tangenti che passano per esso sono i raggi doppi dell'involuzione; cioè (N° 96, a): Due tangenti e due rette reciproche uscenti da uno stesso punto formano un fascio armonico.

Se il punto dato è all'infinito, si ha un'involuzione di rette parallele, reciproche a due a due, il raggio centrale della quale è un diametro della curva (N° 99).

**221.** Sia  $ABCD$  un quadrangolo semplice, inscritto nella conica (fig. 468\*);  $F$  l'intersezione delle sue diagonali  $AC, BD$ ; ed  $E, G$  i punti di concorso delle coppie di lati opposti: così che i tre punti  $E, F, G$  saranno a due a due reciproci (N° 193). Da un punto qualunque  $I$  della  $EG$  conducansi le tangenti  $IP, IQ$  alla conica, e inoltre si proiettino i vertici del quadrangolo. Le due tangenti sono separate armonicamente mediante le  $IE, IF$ , perchè queste rette, essendo  $F$  il polo di  $IE$ , sono reciproche (N° 220). Le  $IE, IF$  formano un gruppo armonico anche colle  $IA, IC$ , giacchè la diagonale  $AC$  del quadrilatero completo formato dalle rette  $AB, BC, CD, DA$  è divisa armonicamente dalle altre due diagonali  $BD, EG$ , e i quattro raggi accennati sono appunto

(<sup>1</sup>) Si suppone che  $s$  non sia una tangente della conica. Se fosse una tangente, presi ad arbitrio in essa i punti  $ABC \dots$ , i punti  $A'B'C' \dots$  coinciderebbero tutti nel punto di contatto  $S$ .

(<sup>2</sup>) DESARGUES, *J. C.*, p. 192-3.

quelli che da  $F$  proiettano i quattro punti armonici di  $AC$ . Per la medesima ragione le  $IE, IF$  separano armonicamente le  $IB, ID$ . Le due tangenti, le  $IA, IC$  e le  $IB, ID$  sono pertanto tre coppie di rette conjugate in una stessa involuzione, i cui raggi doppi sono  $IE, IF$  (N° 96, a). Ossia:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, e se da un punto della retta che unisce i punti di concorso delle coppie di lati opposti si tirano le tangenti alla curva e si proiettano le due coppie di vertici opposti, si hanno tre coppie di rette conjugate in involuzione.

a) In virtù del teorema correlativo a quello di DESARGUES (N° 143, a destra) si può inscrivere nel quadrilatero  $ABCD$  una conica che tocchi le due rette  $IP, IQ$ .

b) Il teorema correlativo a quello ora dimostrato si enuncia così:

Se un quadrilatero (semplice)  $ABCD$  è circoscritto ad una conica (fig. 169\*), e se pel punto  $F$  comune alle diagonali si conduce ad arbitrio una trasversale, questa incontra la curva e le due coppie di lati opposti  $AB$  e  $CD$ ,  $BC$  e  $AD$  in tre coppie di punti conjugati in involuzione.

c) In virtù del teorema di DESARGUES (N° 143, a sinistra), pei due punti comuni alla conica data ed alla trasversale, e pei quattro vertici del quadrilatero si può far passare una conica (1).

**222.** La teoria de' punti reciproci dà una soluzione del problema: trovare le intersezioni della conica individuata da cinque punti o da cinque tangenti con una retta data  $s$ .

Presi in  $s$  due punti  $U, V$ , se ne costruiscano le polari  $u, v$  (N° 191), le quali incontrino  $s$  in  $U', V'$ . Se l'involuzione determinata dalle coppie di punti reciproci  $UU', VV'$  ha due punti doppi  $M, N$ , queste saranno (N° 220) le cercate intersezioni della conica con  $s$  (2).

Correlativamente si risolve il problema: da un punto dato  $S$  condurre le tangenti alla conica individuata da cinque tangenti o da cinque punti.

**223.** Siano  $AA'$  due punti reciproci, situati nella retta data  $s$ ; ed  $O$  il punto in cui  $s$  sega il diametro passante pel polo  $S$  (il diametro che taglia per metà le corde parallele ad  $s$ ); sarà  $O$  il punto centrale dell'involuzione formata in  $s$  dalle coppie di punti reciproci, epperò  $OA \cdot OA' = \text{cost.}^*$  (N° 96). Se  $s$  taglia la conica in due punti  $M, N$ , questi sono gli elementi doppi dell'involuzione, onde  $OA \cdot OA' = OM^2 = ON^2$ . Se la retta  $s$  non incontra la curva, il valore costante di  $OA \cdot OA'$  sarà negativo (N° 96, b); e in questo caso vi sono due punti conjugati dell'involuzione,  $H, H'$ , ossia due punti reciproci rispetto alla conica, pei quali  $O$  è il punto di mezzo; così che  $OA \cdot OA' = OH \cdot OH' = -OH^2 = -OH'^2$ . Il segmento  $HH'$  dicesi allora corda ideale della conica (3); mentre nel primo caso  $MN$  era una corda reale. Dietro questa definizione, si può dire che un diametro con-

(1) CHASLES, *Sections coniques*, N° 422 e 423.

(2) STAUDY, *Geometrie der Lage*, N° 306.

(3) PONCELET, *I. c.*, p. 29.

tiene i punti di mezzo di tutte le corde reali ed ideali, parallele al diametro conjugato.

Se due coniche hanno comune una corda reale  $MN$ , ciò significa che l'una e l'altra passano pei punti  $M, N$ . Invece, se si dicesse che le due coniche hanno comune una corda ideale  $HH'$ , ciò varrebbe a dire che  $H$  ed  $H'$  sono punti reciproci rispetto ad entrambe le coniche, e che pel punto di mezzo della  $HH'$  passano i diametri delle due coniche che contengono i poli della  $HH'$  medesima.

**224.** Un fascio di raggi in involuzione possiede in generale (N° 163) una coppia di rette conjugate ortogonali; dunque:

Per un punto dato ad arbitrio si può sempre condurre una coppia di rette reciproche ortogonali, che sono le bisettrici degli angoli delle tangenti che escono dal punto dato, se questo è esterno alla conica.

**225.** Invece del punto arbitrario  $S$ , prendiamo ora il centro  $O$  della conica (iperbole od ellisse); due rette reciproche saranno due diametri conjugati; dunque (N° 220):

Le coppie di diametri conjugati formano un'involuzione. Se la conica è un'iperbole, l'involuzione ha per raggi doppi gli assintoti; vale a dire, due diametri conjugati dell'iperbole sono sempre separati armonicamente mediante gli assintoti (\*). Se la conica è un'ellisse, l'involuzione non ha raggi doppi.

Considerando in un'involuzione due coppie di elementi conjugati, secondochè l'una coppia sia separata o no mediante l'altra coppia, l'involuzione manca o è dotata di elementi doppi (N° 98, a); dunque:

Di due coppie di diametri conjugati dell'ellisse, l'una  $aa'$  è sempre separata mediante l'altra  $bb'$  (fig. 164\*);

Di due coppie di diametri conjugati dell'iperbole, l'una  $aa'$  non è mai separata mediante l'altra  $bb'$  (fig. 170\*).

**226.** L'involuzione de' diametri conjugati avrà (N° 224) una coppia di diametri conjugati rettangolari. Se ve ne fosse una seconda coppia, qualunque diametro sarebbe perpendicolare al suo conjugato (N° 163), e in tal caso facendo muovere sulla curva il vertice di un angolo i cui lati passino per gli estremi fissi di un diametro, quell'angolo sarebbe costantemente retto (N° 215), epperò la conica sarebbe un cerchio.

(\*) DELANIRE, l. c., II, 43, cor. 4.

a) Dunque ogni conica, che non sia una parabola, nè un cerchio, ha una ed una sola coppia di diametri coniugati rettangolari. A questi due diametri  $aa'$  (fig. 164\* e 170\*) si dà il nome di assi. Nell'iperbole gli assi  $aa'$  sono (N° 225; 52) le bisettrici degli angoli degli assintoti  $m, n$  (fig. 170\*).

b) Considerando un asse come un diametro che divida per metà le corde ad esso perpendicolari, anche la parabola possiede un asse. Infatti, le corde perpendicolari alla direzione comune di tutti i diametri, essendo fra loro parallele, hanno i loro punti di mezzo in una retta (N° 206), che è l'asse  $a$  della parabola (fig. 162\*).

**227.** Siano dati cinque punti di una conica; si potrà, com'è detto nel N° 213, costruirne il centro  $O$  e due paia di diametri coniugati  $uu', vv'$ . Se l'una di queste coppie è separata mediante l'altra, la conica sarà un'ellisse, nel caso opposto un'iperbole (N° 225). In questo secondo caso, costruendo i raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie  $uu', vv'$ , questi saranno gli assintoti della curva. Nell'un caso e nell'altro, costruendo (N° 163) i raggi coniugati ortogonali dell'involuzione medesima, questi saranno gli assi della conica.

Si può anche trovare la direzione degli assi, senza costruire prima il centro e le coppie di diametri coniugati (\*). A tale uopo si descriva il cerchio  $ABC$  e si costruisca (N° 175, a) il quarto punto  $C'$  d'intersezione del medesimo colla conica individuata dai cinque punti dati  $ABCFG$  (fig. 145\*). Una trasversale arbitraria segnerà le due curve e le coppie di lati opposti del quadrangolo inscritto comune  $ABCC'$  in punti accoppiati in involuzione (N° 143). I punti doppi  $P, Q$  di quest'involuzione, se esistono, saranno reciproci (N° 96, a, 220) rispetto all'una e all'altra curva, cioè comporranno la coppia comune (N° 164) alle due involuzioni costituite sulla trasversale dai punti reciproci relativi al cerchio e dai punti reciproci relativi alla conica (N° 220). Si immagini assunta per trasversale la retta all'infinito; siccome questa non taglia il cerchio, così almeno una delle predette due involuzioni è priva di punti doppi, e per conseguenza (N° 164) i punti  $P, Q$  esistono realmente. Questi punti essendo all'infinito e reciproci rispetto ad entrambe le curve, saranno (N° 206, 212) i poli di due diametri coniugati del cerchio e anche di due diametri coniugati della conica; ma i diametri coniugati di un cerchio sono ortogonali (N° 217), dunque  $P, Q$  sono i poli degli assi della conica. Gli stessi punti  $P, Q$  sono anche separati armonicamente mediante ciascuna coppia di lati opposti del quadrangolo  $ABCC'$ ; ne segue che  $P, Q$  sono i punti all'infinito delle bisettrici degli angoli di ciascuna coppia di lati opposti (N° 52). Di qui si vede che per ottenere le cercate direzioni degli assi, basta condurre

(\*) PONCELET, *l. c.*, N° 394.

le bisettrici di una coppia di lati opposti del quadrangolo  $ABCC'$ , per esempio della coppia  $AB, CC'$  (fig. 145<sup>a</sup>).

**228.** Abbiasi un quadrilatero completo  $qrst$  ed un punto qualsivoglia  $S$  (fig. 138<sup>a</sup>). S'è già veduto (N° 145, a destra) che nell'involuzione determinata dalle coppie  $aa', bb'$  di raggi che da  $S$  proiettano due coppie di vertici opposti, sono conjugate le tangenti condotte da  $S$  a qualsivoglia conica inscritta nel quadrilatero. Supponiamo che l'involuzione abbia due raggi doppi  $m, n$ ; questi separeranno armonicamente quella coppia di tangenti (N° 96,  $a$ ), epperò saranno essi (N° 220) rette reciproche rispetto alla conica. Dunque (N° 170, a destra):

Se per un punto dato passano due coniche inscritte in un dato quadrilatero, le loro tangenti in quel punto sono rette reciproche rispetto a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero medesimo.

Invece di assumere ad arbitrio il punto  $S$ , possiamo supporre data la retta  $m$ ; se questa retta non passa per alcuno de' vertici del quadrilatero, esisterà una (ed una sola) conica tangente alle cinque rette  $mqrst$  (N° 116,  $b$ ). Sia  $S$  il punto in cui questa conica tocca  $m$ ; per  $S$  passerà un'altra conica inscritta nel quadrilatero, la cui tangente in  $S$  s'indichi con  $n$ . Le rette  $m, n$  saranno adunque reciproche rispetto a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero, vale a dire (N° 189):

I poli di una retta arbitraria  $m$  rispetto a tutte le coniche inscritte in uno stesso quadrilatero sono situati in un'altra retta  $n$ .

$a$ ) Siccome le  $m, n$  sono i raggi doppi dell'involuzione nella quale sono conjugati i raggi  $aa'$  condotti da  $S$  a due vertici opposti, così:

Le rette  $m, n$  dividono armonicamente ciascuna diagonale del quadrilatero.

$b$ ) Le proposizioni correlative sono:

Se una retta data tocca due coniche circoscritte ad un dato quadrangolo, i due punti di contatto sono reciproci rispetto a tutte le coniche circoscritte al quadrangolo medesimo.

Le rette polari di un dato punto  $M$ , rispetto a tutte le coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo, concorrono in un punto fisso  $N$ .

I due punti  $M, N$  separano armonicamente ciascuna coppia di lati opposti del quadrangolo completo.

c) Nel primo teorema si supponga essere  $m$  la retta all'infinito, i poli di  $m$  saranno i centri delle coniche (N° 210); dunque:

I centri di tutte le coniche inscritte in uno stesso quadrilatero sono in una retta (fig. 171<sup>a</sup>), che divide per metà le diagonali del quadrilatero (1).

d) Anche nel secondo teorema (b) supponiamo essere il punto  $M$  all'infinito; le polari di  $M$  saranno (N° 206) i diametri coniugati a quelli il cui punto all'infinito è  $M$ ; dunque:

I diametri di tutte le coniche circoscritte ad un quadrangolo fisso, coniugati ad un diametro di direzione data, concorrono in un punto fisso.

**229.** Il teorema di NEWTON (N° 228, c) dà un mezzo semplice per trovare il centro di una conica data per mezzo di cinque tangenti  $abcde$  (fig. 172<sup>a</sup>).

Le quattro tangenti  $abcd$  formano un quadrilatero, del quale si divideranno le diagonali per metà. Operando similmente sul quadrilatero  $abce$ , le due bisecanti concorreranno in un punto  $O$ , che sarà il centro cercato.

Le cinque tangenti, prese a quattro a quattro, danno cinque quadrilateri; le cinque bisecanti delle diagonali passeranno adunque tutte pel centro  $O$  della conica inscritta nel pentagono  $abcde$ .

Lo stesso teorema serve a determinare la direzione dei diametri della parabola data per mezzo di quattro tangenti  $abcd$ . Infatti, il punto all'infinito della retta che contiene i punti di mezzo delle diagonali del quadrilatero  $abcd$  sarà il polo della retta all'infinito rispetto ad una conica inscritta nel quadrilatero medesimo (N° 228), cioè sarà il punto all'infinito della parabola inscritta. Dunque la detta bisecante è essa medesima un diametro della parabola (fig. 171<sup>a</sup>).

## § 22. Figure polari reciproche.

**230.** S'è già veduto (N° 190) che, data una conica fondamentale  $K$ , se un polo variabile descrive una retta, la polare ruota intorno ad un punto determinato; e viceversa, se una retta, considerata come polare, si muove passando per un punto fisso, il polo percorre una retta determinata.

Considero ora come polari tutte le tangenti di una data curva  $C$ ; ossia immagino che la retta polare si muova involupando la curva data. Il polo si muoverà descrivendo un'altra linea, che s'indicherà con  $C'$ . I punti di  $C'$  sono adunque i poli delle tangenti di  $C$ .

(1) NEWTON, *I. c.*, lib. 1, lemma 25, cor. 3.

Viceversa, dico che i punti di  $C$  sono i poli delle tangenti di  $C'$ . Infatti, siano  $M, N$  due punti di  $C'$  (fig. 173°); le loro polari  $m, n$  saranno due tangenti di  $C$ ; ed il punto  $mn$  sarà il polo della corda  $M'N'$  (N° 190). Suppongo che il punto  $N'$  si vada sempre più avvicinando ad  $M'$ ; la corda  $M'N'$  si avvicinerà alla posizione della tangente di  $C'$  in  $M'$ ; la retta  $n$  si accosterà sempre più alla posizione di  $m$ , ed il punto  $mn$  tenderà verso il punto ove  $m$  tocca  $C$ . Quando la distanza  $M'N'$  sia divenuta evanescente, si avrà che la tangente di  $C'$  in  $M'$  è la polare del punto di contatto fra  $m$  e  $C$ . Dunque, come le tangenti di  $C$  sono le polari dei punti di  $C'$ , così le tangenti di  $C'$  sono le polari dei punti di  $C$ ; se una retta  $m$  tocca  $C$  in  $M$ , il polo  $M'$  di  $m$  è un punto di  $C'$  e la polare  $m'$  di  $M$  è tangente a  $C'$  in  $M'$ .

Le due curve  $C, C'$ , ciascuna delle quali è simultaneamente il luogo dei poli delle tangenti dell'altra e l'involuppo delle polari dei punti dell'altra, diconsi polari reciproche (1°).

**231.** Una retta qualunque  $r$  incontri una delle due curve reciproche in  $\mu$  punti; le polari di questi punti sono altrettante tangenti dell'altra curva, uscenti dal polo  $R'$  di  $r$ . La seconda curva è dunque toccata da tante rette uscenti da un dato punto  $R'$ , quante sono le intersezioni della prima colla retta  $r$ , polare di  $R'$ ; e viceversa.

**232.** Suppongo ora che  $C$  sia una conica;  $a$  e  $b$  siano due sue tangenti, che da tutte le altre tangenti  $c, d, e, \dots$  saranno incontrate in punti corrispondenti di due punteggiate proiettive (N° 113, b). Vale a dire, considero  $C$  come involuppo delle rette  $c, d, e, \dots$  che uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive  $a$  e  $b$  (N° 114, b).

La curva  $C'$  conterrà i poli  $A', B', C', D', E', \dots$  delle tangenti  $a, b, c, d, e, \dots$  di  $C$ . Le rette  $A'(C' . D' . E' \dots)$  saranno le polari dei punti  $a(c . d . e \dots)$  e formeranno un fascio proiettivo alla punteggiata  $a$  dei poli; o così pure le rette  $B'(C' . D' . E' \dots)$  saranno le polari dei punti  $b(c . d . e \dots)$  e formeranno un fascio proiettivo alla punteggiata  $b$  dei poli (N° 219). Ma le due punteggiate  $a(c . d . e \dots), b(c . d . e \dots)$  sono proiettive; sono adunque proiettivi anche i fasci  $A'(C' . D' . E' \dots), B'(C' . D' . E' \dots)$ . Donde segue che

(1°) PONCELET, I. c., N° 232.

$C'$  è il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti di due fasci proiettivi; ossia (N° 114, a):

La curva polare reciproca di una conica è un'altra conica <sup>(1)</sup>.

**233.** Data la conica fondamentale  $K$ , ed un'altra conica  $C$ , della quale si voglia determinare la polare reciproca  $C'$ , si può domandare se  $C'$  sarà un'ellisse, un'iperbole o una parabola. La retta all'infinito è la polare del centro  $O$  di  $K$ ; perciò i punti all'infinito di  $C'$  corrisponderanno alle tangenti di  $C$  uscenti da  $O$ . Segue da ciò che la conica  $C'$  sarà un'ellisse o un'iperbole, secondo che il punto  $O$  sia interno od esterno alla conica  $C$ ; sarà una parabola, se  $O$  è un punto di  $C$ .

Se  $A$  è il polo di una retta  $a$  rispetto a  $C$ , e se  $a'$ ,  $A'$  sono la polare di  $A$  ed il polo di  $a$  rispetto a  $K$ , sarà  $A'$  il polo di  $a'$  rispetto a  $C'$ , perchè ad un gruppo armonico di quattro poli corrisponde un gruppo armonico di quattro polari (N° 219), e viceversa. Dunque il centro  $M'$  di  $C'$  sarà il polo relativo a  $K$  di quella retta  $m$  che, rispetto a  $C$ , è la polare di  $O$ . Due diametri coniugati di  $C'$  corrisponderanno a due punti di  $m$ , reciproci rispetto a  $C$ , ecc., ecc.

**234.** Nel piano della conica fondamentale sia data una figura (N° 1) o complesso qualsivoglia di punti, rette e curve; di ogni punto si costruisca la retta polare, di ogni retta il polo, di ogni curva la curva polare reciproca. Si ottiene così una nuova figura; e le due figure diconsi polari reciproche, perchè ciascuna di esse contiene i poli delle rette dell'altra, le polari dei punti dell'altra, le curve polari delle curve dell'altra.

Due figure polari reciproche sono figure correlative, secondo il principio di dualità nella geometria piana (N° 27); giacchè ad ogni punto dell'una corrisponde una retta nell'altra, ad ogni punteggiata della prima un fascio nella seconda. Di più, esse giacciono in uno stesso piano e vi hanno una determinata giacitura scambievolmente, essendo ogni punto dell'una e la retta corrispondente dell'altra collegate fra loro dalla condizione di dover essere polo e polare rispetto ad una conica fissa. Invece due figure correlative, concepite col solo uso del principio di dualità, non hanno fra loro alcun vincolo di posizione l'una rispetto all'altra <sup>(2)</sup>.

(<sup>1</sup>) PONCELET, *l. c.*, N° 234.

(<sup>2</sup>) STEINER, *l. c.*, p. VII della prefazione.



**235.** Di due figure polari reciproche, se l'una contiene una punteggiata (di poli), l'altra contiene un fascio (delle polari); e queste due forme corrispondenti sono proiettive (N° 219). Perciò, se i punti della punteggiata sono accoppiati in involuzione, anche i raggi del fascio corrispondente avranno la medesima proprietà; e ai punti doppi della prima involuzione corrisponderanno i raggi doppi della seconda (N° 95). Se nell'una figura vi è una conica, nell'altra vi sarà del pari una conica (N° 232); ai punti della prima conica corrisponderanno le tangenti della seconda, alle tangenti della prima i punti della seconda; ai poligoni inscritti nell'una i poligoni circoscritti nell'altra (N° 230). Se la prima figura esprime la dimostrazione di un teorema o la soluzione di un problema, la seconda esprimerà la dimostrazione del teorema correlativo o la soluzione del problema correlativo: dove lo scambio ha luogo fra gli elementi punto e retta.

**236. TEOREMA.** — I vertici di due triangoli coniugati ad una conica sono punti di una seconda conica, e i loro lati sono tangenti di una terza conica (\*).

Siano  $ABC$ ,  $DEF$  due triangoli, ciascun de' quali sia coniugato (N° 192) alla conica fondamentale  $\mathbf{K}$  (fig. 174<sup>a</sup>); comincerò dal dimostrare che due de' sei lati incontrano gli altri quattro in due gruppi proiettivi di quattro punti.

Il lato  $BC$  incontra  $DE$ ,  $DF$  in  $B_1$ ,  $C_1$ ; ed il lato  $EF$  incontra  $AB$ ,  $AC$  in  $E_1$ ,  $F_1$ . I punti  $B$ ,  $C$  sono i poli delle rette  $CA$ ,  $AB$ ; il punto  $B_1$ , essendo comune alle  $BC$ ,  $DE$  ha per polare la congiungente  $AF$  de' loro poli; e così pure  $C_1$ , comune alle  $BC$ ,  $DF$ , ha per polare la  $AE$ . Il gruppo di quattro poli  $BCB_1C_1$  è dunque proiettivo (N° 219) al gruppo delle quattro polari  $A(C, B, F, E)$ ; epperò è anche proiettivo al gruppo  $F_1E_1FE$  de' punti in cui queste quattro rette sono segate dalla trasversale  $EF$ . Si ha cioè  $(BCB_1C_1) = (F_1E_1FE)$ , ossia (N° 56)  $(BCB_1C_1) = (E_1F_1EF)$ ; uguaglianza che appunto esprime la proiettività de' due gruppi di quattro punti in cui le  $BC$ ,  $EF$  sono incontrate dalle  $AB$ ,  $CA$ ,  $DE$ ,  $FD$ . Queste sei rette, vale a dire i sei lati de' triangoli proposti, sono adunque (N° 114, b) tangenti di una medesima conica  $\mathbf{C}$ .

I poli di queste sei rette sono i sei vertici de' triangoli medesimi; dunque (N° 232) i sei vertici sono punti di una stessa conica  $\mathbf{C}'$ , che è la polare reciproca di  $\mathbf{C}$  rispetto alla conica fondamentale  $\mathbf{K}$ .

a) Il teorema attuale si può esprimere eziandio dicendo che la conica  $\mathbf{C}$ , tangente a cinque de' sei lati di due triangoli coniugati ad una data conica  $\mathbf{K}$ , tocca anche il sesto lato; e la conica determinata da cinque vertici passa anche pel sesto.

(\*) STEINER, *L. c.*, p. 308. — CHASLES, *L. c.*, N° 215.

Donde s'inferisce che, se una conica  $C$  tocca i lati di un triangolo  $abc$  conjugato ad un'altra conica  $K$ , infiniti altri triangoli conjugati a questa saranno circoscritti alla prima. Infatti, sia  $d$  una tangente qualsivoglia di  $C$ ; dal punto  $D$ , polo di  $d$  rispetto a  $K$ , s'imagini condotta un'altra tangente  $e$  a  $C$ ; e sia  $f$  la polare, rispetto a  $K$ , del punto  $de$ , così che sarà  $def$  un triangolo conjugato a  $K$  (N° 193). Siccome  $C$  tocca già cinque lati  $abede$  di due triangoli conjugati a  $K$ , così toccherà anche il sesto lato  $f$ ; c. d. d. Se dal punto  $D$  si possono condurre anche due tangenti  $e', f'$  a  $K$ , le quattro rette  $efe'f'$  formeranno un gruppo armonico, perchè le  $ef$  sono reciproche rispetto a  $K$  (N° 220); dunque le  $e'f'$  saranno reciproche rispetto a  $C$ .

Il luogo del punto  $D$  è la conica  $C'$ , polare reciproca di  $C$  rispetto a  $K$ ; dunque:

Se una conica  $C$  è inscritta in un triangolo conjugato ad un'altra conica  $K$ , il luogo di un punto dal quale si possa condurre un fascio armonico di quattro tangenti alle due coniche è una terza conica  $C'$ , polare reciproca di  $C$  rispetto a  $K$ .

b) Correlativamente, possiamo anche dire che, se una conica  $C'$  passa pei vertici di un triangolo conjugato ad un'altra conica  $K$ , sarà pur circoscritta ad infiniti altri triangoli conjugati alla stessa  $K$ ; e le rette che segano  $C'$  e  $K$  in due coppie di punti conjugati armonicamente sono tutte tangenti di una stessa conica  $C$ , polare reciproca di  $C'$  rispetto a  $K$ .

237. Considero una conica  $C$  e due triangoli circoscritti  $OQ'R$ ,  $O'PS$  (fig. 175<sup>a</sup>). Le due tangenti  $PS$ ,  $Q'R$  sono incontrate dagli altri quattro lati  $OP$ ,  $OQ'$ ,  $OR$ ,  $O'S$  in due gruppi corrispondenti  $PQRS$ ,  $P'Q'R'S'$  di due punteggiate proiettive  $u$ ,  $u'$  (N° 113, b). Perciò saranno anche proiettivi i gruppi di raggi  $O(P, Q, R, S)$ ,  $O'(P', Q', R', S')$  che proiettano quei punti risp. da  $O$ ,  $O'$ . Dunque i punti  $P, Q, R, S$ , dove si segano i raggi corrispondenti, sono situati (N° 114, a) in una conica  $C'$ , che passa pei centri di proiezione  $O, O'$ ; vale a dire:

Se due triangoli sono circoscritti ad una conica, essi sono inscritti in un'altra conica.

Partendo invece dalla considerazione della conica  $C'$  e de' triangoli inscritti  $PQR$ ,  $O'PS$ , si dimostra affatto analogamente (correlativamente) il teorema correlativo ed inverso del precedente:

Se due triangoli sono inscritti in una conica, essi sono circoscritti ad un'altra conica (1).

a) Di qui segue immediatamente:

(1) BRIANCHON, l. c., p. 35. -- STEINER, l. c., p. 473.

La conica che contiene cinque vertici di due triangoli circoscritti ad un'altra conica passa anche pel sesto.

La conica che tocca sei lati di due triangoli inscritti in un'altra conica tocca anche il sesto.

Orvero:

Se due coniche sono tali che si possa inscrivere nell'una un triangolo che riesca circoscritto all'altra, infiniti altri triangoli avranno la stessa proprietà (1).

b) Nella figura abbiamo quattro forme proiettive, cioè le due punteggiate  $u, u'$ , che determinano le tangenti della conica  $C$ , e i due fasci  $O, O'$ , che determinano i punti di  $C'$ ; il fascio  $O$  è prospettivo alla punteggiata  $u$ , e così il fascio  $O'$  è prospettivo ad  $u'$ . Dunque, se una tangente qualsivoglia di  $C$  sega  $u, u'$  in  $A, A'$ , i raggi  $OA, OA'$  concorreranno in un punto  $M$  di  $C'$ ; e viceversa, se un punto qualunque  $M$  di  $C'$  vien proiettato da  $O, O'$ , i raggi proiettanti incontreranno  $u, u'$  in due punti  $A, A'$  di una stessa tangente di  $C$ . Dunque:

Se due lati di un triangolo variabile  $AA'M$  girano attorno a due punti fissi  $O, O'$  di una data conica, mentre i vertici opposti corrono su due rette fisse  $u, u'$ , ed il terzo vertice percorre la conica anzidetta, il terzo lato toccherà costantemente una conica determinata, tangente alle due rette  $u, u'$ .

Se due vertici di un triangolo variabile  $AA'M$  corrono su due rette  $u, u'$ , tangenti ad una conica data, mentre i lati opposti ruotano intorno a due punti fissi  $O, O'$ , ed il terzo lato tocca la conica anzidetta, il terzo vertice percorrerà una conica determinata, che passa pei punti  $O, O'$ .

**238.** Abbiasi un triangolo  $TRS$ , i cui lati  $RS, ST, TR$  (fig. 106\*) siano incontrati da una trasversale in  $A', B', C'$ ; e le polari di questi punti rispetto ad una conica data  $K$  (non tracciata nella figura), incontrino la trasversale medesima ne' punti  $A, B, C$ . Le tre coppie di punti reciproci  $AA', BB', CC'$  saranno in involuzione (N° 220), epperò (N° 103) le congiungenti  $TA, RB, SC$  concorreranno in un punto  $Q$ . Suppongasì inoltre il punto  $T$  reciproco ad  $A'$ , ed  $R$  reciproco a  $B'$ ; vale a dire, le polari di  $A', B'$  (rispetto alla conica data) siano  $TA, RB$ ; il punto  $Q$  comune a queste polari sarà per conseguenza il polo della trasversale  $A'B'$ . Essendo  $C'$  un punto di questa retta ed inoltre reciproco a  $C$ , la sua po-

(1) PONCELET, *l. c.*, N° 565.

lare sarà  $QC$ ; ma  $QC$  passa per  $S$ ; dunque anche  $S$  e  $C'$  sono punti reciproci. Considerando ora il quadrilatero completo formato dalla trasversale e dai lati del triangolo  $TRS$ , si potrà concludere il teorema:

Se i termini  $(T, A)$ ,  $(R, B)$  di due diagonali di un quadrilatero completo formano due coppie di poli reciproci rispetto ad una data conica, anche i termini  $(S, C')$  della terza diagonale sono reciproci rispetto alla medesima conica (1).

a) Il teorema correlativo potrà servire d'esercizio ai giovani studiosi:

Se due paja di lati opposti di un quadrangolo completo sono formate da rette reciproche rispetto ad una conica, anche gli altri due lati saranno rette reciproche rispetto alla conica medesima.

Del resto, per ottenere il quadrangolo completo qui accennato, basta prendere la figura polare reciproca del quadrilatero considerato nel teorema di HESSE, cioè la figura formata dalle polari dei sei punti  $TA' . RB' . SC'$ .

b) La seguente proposizione è un corollario del teorema ora dimostrato:

Due triangoli reciproci rispetto ad una conica sono omologici (2).

Sia  $ABC$  un triangolo (fig. 158<sup>a</sup>); le polari dei vertici, rispetto alla conica data, formano un altro triangolo  $A'B'C'$ , reciproco al primo: cioè, reciprocamente, i lati del primo sono le polari dei vertici del secondo. Sia  $E$  il concorso delle  $CA, C'A'$ ; ed  $F$  il concorso delle  $AB, A'B'$ . I punti  $B$  ed  $E$  sono reciproci, perchè  $E$  è situato nella  $C'A'$ , polare di  $B$ ; e così pure sono reciproci  $C$  ed  $F$ . Nel quadrilatero formato dalle rette  $BC, CA, AB, EF$  abbiamo dunque due coppie di vertici opposti  $BE, CF$ , che sono poli reciproci rispetto alla conica data: perciò, la stessa proprietà sarà posseduta dagli altri due vertici, cioè dal punto  $A$  e dall'intersezione delle rette  $BC, EF$ . La polare di  $A$ , che è  $B'C'$ , passa pertanto pel punto  $D$ , comune alle  $BC, EF$ ; cioè, ne' due triangoli

(1) HESSE, *De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis* (Dissertatio pro venia legendi, Regiomonti 1840), p. 47.

(2) CHASLES, *l. c.*, N° 135.

$ABC$ ,  $A'B'C'$ , le coppie di lati corrispondenti si segano in tre punti in linea retta  $DEF$ . Ne segue (N° 13) che le congiungenti de' vertici  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concorreranno in un punto  $O$ , polo della retta  $DEF$ .

c) Combinando questo teorema con quello del N° 118, si può enunciare la seguente proprietà:

Se due triangoli sono reciproci rispetto ad una conica  $K$ , i sei punti nei quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro sono in una conica  $C$ ; e le sei rette congiungenti i vertici dell'uno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica  $C'$ , che è la polare reciproca di  $C$  rispetto a  $K$  (1) (N° 232), perchè coteste sei rette sono le polari di que' sei punti rispetto a  $K$ .

Se dei due triangoli l'uno  $A'B'C'$  è inscritto nell'altro  $ABC$ , le tre coniche coincidono in una sola che è circoscritta al primo ed inscritta nel secondo triangolo (N° 137, 139).

d) Dati due triangoli omologici  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , proponiamoci il problema di costruire la conica, rispetto alla quale essi sono reciproci. Per ottenere i punti in cui questa conica incontra per es. la retta  $BC$ , basta osservare che essi sono gli elementi doppi dell'involuzione nella quale  $B$  è conjugato all'intersezione di  $BC$  con  $C'A'$ , e  $C$  è conjugato all'intersezione di  $BC$  con  $A'B'$  (N° 226). Siccome i punti  $A'$ ,  $B$  sono i poli delle rette  $BC$ ,  $C'A'$ , così essi punti e l'intersezione di queste rette saranno i vertici di un triangolo conjugato (N° 192). Dunque, se cercando le intersezioni della conica colle rette  $BC$ ,  $C'A'$  col processo suesposto, si trovassero due involuzioni senza elementi uniti, bisognerà concluderne che la conica non esiste; giacchè, quando essa esistesse realmente, due lati del triangolo conjugato dovrebbero incontrarla (N° 195).

Il centro d'omologia  $O$  de' due triangoli dati (fig. 158<sup>a</sup>) è il polo dell'asse di omologia  $DEF$ : e la corrispondenza proiettiva (N° 219) fra i punti (poli) dell'asse e i raggi (polari) uscenti dal centro d'omologia è determinata dalle tre coppie di elementi corrispondenti:  $D$  ed  $AA'$ ,  $E$  e  $BB'$ ,  $F$  e  $CC'$ ; epperò, di qualunque altro punto dell'asse (di qualunque altro raggio per  $O$ ) si potrà costruire linearmente (N° 66) la polare (il polo).

Il discorso fatto qui pel punto  $O$  e per l'asse d'omologia può ora essere ripetuto per qualunque vertice dell'un triangolo e per la sua polare, che è il corrispondente lato dell'altro triangolo. Infatti, se per es. si considerano il vertice  $A'$  e il lato  $BC$ , la corrispondenza proiettiva fra i raggi per  $A'$  e i punti di  $BC$  è determinata dalle tre coppie d'elementi corrispondenti:  $A'B'$  e  $C$ ,  $A'C'$  e  $B$ ,  $A'O$  e  $D$ .

(1) Dico corrispondenti per es. il lato  $BC$  dell'un triangolo e il lato  $B'C'$  dell'altro che si oppone al polo  $A'$  di  $BC$ , ecc.

Ciò premesso, si può costruire linearmente anche la polare di un punto qualunque  $P$ , o il polo di una retta qualsivoglia  $p$ . Infatti, se è dato  $P$ , noi sappiamo già costruire i poli delle rette  $PO, PA, PB, PC, PA', \dots$ , i quali giaceranno in una retta, che è la cercata polare di  $P$ . Se invece è data la retta  $p$ , le polari dei punti in cui essa incontra  $BC, CA, \dots$  concorreranno in un punto, che è il polo di  $p$ .

Ora si badi che tutte queste determinazioni di poli e polari sono lineari (di 1° grado) e indipendenti dalla costruzione della conica fondamentale: la quale è invece un problema di 2° grado, perchè si riduce alla ricerca degli elementi doppi di un'involuzione. La costruzione dei poli e delle polari è dunque sempre possibile, anche quando non esiste la conica fondamentale. Vale a dire: i due triangoli omologici proposti individuano una corrispondenza reciproca fra i punti e le rette del piano, tale che ad ogni punto corrisponde una retta, ad ogni retta un punto, ai raggi di un fascio i punti d'una punteggiata proiettiva al fascio, e viceversa. Conveniamo di chiamare polo e polare un punto qualunque e la retta che gli corrisponde; e sistema polare cotesto insieme di poli e polari, che possiede tutte le proprietà di quello che è determinato da una conica fondamentale (N° 188).

Due triangoli omologici individuano pertanto un sistema polare. Se esiste una conica fondamentale, questa è il luogo dei poli situati nelle rispettive polari ed è l'involuppo delle rette passanti pei rispettivi poli. Se non esiste conica fondamentale, non vi ha alcun punto situato nella propria polare (1).

### § 23. Corollari e costruzioni.

**239.** Rammentisi il teorema del N° 205, e si supponga che i vertici  $B, C$  del triangolo inscritto  $ABC$  siano i punti all'infinito di un'iperbole; allora  $S$  sarà il centro della curva, e il teorema darà:

Se da un punto ( $A$ ) dell'iperbole si conducono le parallele agli assintoti, queste incontrano un diametro qualunque in due punti reciproci ( $F, G$ ). Ossia:

Se per due punti reciproci allineati col centro dell'iperbole si tirano le parallele agli assintoti, queste si segano sulla curva.

Di qui si cava un modo di costruire per punti un'iperbole della quale siano dati gli assintoti e un punto  $M$ . Sulla retta  $SM$ , che congiunge  $M$  al punto  $S$  comune agli assintoti, si prenderanno due punti coniugati dell'involuzione determinata dal punto centrale  $S$  e dal punto doppio  $M$ ; cotesti due punti sono reciproci rispetto alla conica (N° 220), epperò conducendo per essi le parallele agli assintoti, i due vertici del parallelogrammo risultante saranno punti della curva da costruirsi.

**240.** In modo analogo si applichi all'iperbole il teorema del N° 204, supponendo che i lati  $b, c$  del triangolo inscritto  $abc$  siano gli assintoti:

(1) STAUBT, *l. c.*, N° 241.

Se pei punti in cui gli assintoti dell'iperbole sono segati da una tangente qualunque ( $a$ ) si conducono due parallele ( $f, g$ ) in direzione arbitraria, queste sono rette reciproche. Ossia:

Due rette reciproche parallele segano gli assintoti in punti situati in una stessa tangente dell'iperbole.

Di qui si cava una regola per costruire le tangenti di un'iperbole, della quale siano dati gli assintoti  $b, c$  ed una tangente  $m$ . A quest'uopo basta condurre parallelamente ad  $m$  due rette conjugate nell'involuzione (N° 99) determinata dal diametro parallelo ad  $m$ , come raggio centrale, e da  $m$  come raggio doppio. Coteste due rette conjugate sono reciproche rispetto alla conica, epperò, congiungendo i punti in cui esse tagliano gli assintoti, si avrà una tangente della curva.

**241.** Siano  $B$  e  $C$  due punti qualunque d'una parabola, ed  $A$  il punto ove la curva è incontrata dal diametro che taglia per metà la corda  $BC$ . Siano  $F, G$  due punti reciproci, situati nel diametro, cioè due punti equidistanti da  $A$  (N° 106); in virtù del teorema del N° 205, le rette  $BF, CG$ , come pure le rette  $BC, CF$  concorreranno sulla curva.

Di qui si ha una costruzione per punti della parabola circoscritta ad un triangolo  $ABC$  ed avente per diametro la retta condotta da  $A$  al punto di mezzo di  $BC$ .

Siano  $H, H'$  due punti reciproci, presi nella corda  $BC$ , cioè due punti separati armonicamente per mezzo di  $BC$ . Siccome i punti  $H, H'$  sono in linea retta col polo del diametro che passa per  $A$ , così, applicando il teorema stesso del N° 205, si avrà un punto della parabola nell'incontro della  $AH$  col diametro per  $H'$  (e un altro nell'incontro della  $AH'$  col diametro per  $H$ ). E ciò dà un altro modo di costruire la parabola sotto le condizioni dianzi esposte.

**242.** Se nel teorema del N° 204 supponiamo che  $c$  sia la retta all'infinito, si ha:

Se  $a, b$  sono due tangenti della parabola, e se per un punto qualunque del diametro conjugato ad  $a$  si conducono due rette reciproche, l'una delle quali passi pel punto  $ab$ , l'altra sarà parallela a  $b$ , e viceversa.

Così si ha una maniera di costruire per tangenti la parabola, della quale siano date due tangenti  $a, t$ , il punto  $A$  di contatto di  $a$  e la direzione dei diametri. Conducasi per  $A$  il diametro che incontri  $t$  in  $O$ ; l'altra tangente  $t'$  per  $O$  sarà la retta che è separata armonicamente da  $t$  mediante il diametro  $OA$  e la parallela ad  $a$ . Tirinsi ora per  $O$  due rette reciproche, cioè due rette  $h, h'$  che separino armonicamente  $t, t'$ ; la parallela ad  $h'$  condotta pel punto  $ha$  e la parallela ad  $h$  condotta pel punto  $h'a$  saranno tangenti della parabola cercata.

**243.** Se nel teorema del N° 204 si suppone che  $a$  sia la retta all'infinito,  $b$  e  $c$  due tangenti della parabola, si ha:

Le rette parallele a due tangenti della parabola, condotte per un punto della corda di contatto, sono reciproche.

Dunque, applicando lo stesso teorema, si avrà ancora:

Se per un punto della corda di contatto di due tangenti  $b, c$  della parabola si conducono due rette,  $h$  parallela a  $b$  ed  $h'$  parallela a  $c$ , la retta che unisce i punti  $hc, h'b$  sarà una tangente della curva (1).

Di qui un mezzo per costruire le tangenti della parabola determinata da due tangenti e dai loro punti di contatto.

**244.** Nel teorema del N° 205, supponiamo che il triangolo inscritto sia  $AA_1M$ , avente due vertici  $A, A_1$  in linea retta col centro  $O$  della conica (ellisse od iperbole, fig. 176<sup>a</sup>); onde il polo del lato  $AA_1$  sarà il punto all'infinito, comune alle corde bisecate dal diametro  $AA_1$ . Il suddetto teorema dà:

Le rette condotte da due punti reciproci  $P, P'$  ai termini  $A, A_1$  del diametro; il cui conjugato è parallelo alla  $PP'$ , concorrono sulla conica.

a) Le coppie di punti reciproci, analoghi a  $PP'$ , che supporremo presi nel diametro conjugato ad  $AA_1$ , formano un'involuzione (N° 220), il cui punto centrale è il centro  $O$  della conica. Se questa involuzione ha due elementi doppi  $B, B_1$ , questi sono punti della curva, la quale è per conseguenza un'ellisse. Se l'involuzione non ha punti doppi, la conica è un'iperbole (N° 212); allora si possono trovare due punti  $B, B_1$ , conjugati nell'involuzione, epperò reciproci rispetto alla conica, i quali abbiano per punto di mezzo  $O$  (N° 96,  $b$ ). E nell'un caso e nell'altro, per grandezza del diametro conjugato ad  $AA_1$  s'intende il segmento  $BB_1$  (N° 218,  $b$ , 223).

Per l'ellisse si ha (N° 223)

$$OP \cdot OP' = \text{cost.}^* = \overline{OB} = \overline{OB}_1,$$

e per l'iperbole

$$OP \cdot OP' = \text{cost.}^* = OB \cdot OB_1 = -\overline{OB} = -\overline{OB}_1.$$

b) Il teorema suesposto ci dà pertanto un modo di risolvere il problema:

Costruire per punti la conica della quale siano dati in grandezza e posizione due diametri conjugati  $AA_1, BB_1$ .

Nel caso dell'ellisse (fig. 176<sup>a</sup>,  $a$ ) i quattro punti  $AA_1BB_1$  appartengono alla curva; nel caso dell'iperbole (fig. 176<sup>a</sup>,  $b$ ), sia  $AA_1$  il diametro che sega la conica.

(1) DELAHIRE, *l. c.*, III, 21.



Nel diametro  $BB_1$  costruiscansi più coppie di punti  $PP'$  coniugati nell'involuzione che ha in  $O$  il punto centrale, e  $BB_1$  per punti doppi nel 1° caso, ovvero  $BB_1$  per punti coniugati nel 2°. I raggi  $AP$ ,  $A_1P'$  (come pure i raggi  $A_1P$ ,  $AP'$ ) si segneranno sulla curva.

c) Le  $OX$ ,  $OX'$  condotte per  $O$  parallelamente alle  $AP$ ,  $AP'$  sono due diametri coniugati (N° 215). I diametri coniugati formano un'involuzione (N° 225), epperò anche le coppie di punti analoghe ad  $XX'$  (ove i diametri incontrano la tangente in  $A$ ) costituiscono un'involuzione, il cui punto centrale è  $A$ , perchè  $OA$  e la  $OB$ , parallela ad  $AX$ , sono due diametri coniugati. Se la conica è un'iperbole, l'involuzione de' diametri coniugati ha due raggi doppi, che sono gli assintoti; dunque, i punti  $K$ ,  $K_1$ , ove  $AX$  incontra gli assintoti, sono i punti doppi dell'involuzione  $XX'$ ....

Nella figura (176<sup>a</sup> b) è segnato un solo dei punti  $KK_1$ .

d) Dai triangoli uguali  $OPA$ ,  $AXO$  si ha  $AX = -OP$ ; e dai triangoli uguali  $OP'A_1$ ,  $AX'O$  si ha del pari  $AX' = OP$  (1). Ma (a) si ha  $OP \cdot OP' = \pm \overline{OB}^2$ , dunque  $AX \cdot AX' = \mp \overline{OB}^2$ , ossia:

Il rettangolo de' segmenti che due diametri coniugati determinano sopra una tangente fissa, a partire dal punto di contatto, è costantemente uguale al quadrato ( $\mp \overline{OB}^2$ ) del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

e) Nel caso dell'iperbole, i punti  $K$ ,  $K_1$  sono gli elementi doppi dell'involuzione nella quale  $A$  è il punto centrale e  $XX'$  due punti coniugati; dunque  $AX \cdot AX' = \overline{AK}^2 = \overline{OB}^2$ , epperò  $AK = OB$ . Ciò significa che la figura  $OAKB$  è un parallelogrammo; ossia:

Se si costruisce un parallelogrammo su due semidiametri coniugati dell'iperbole, una delle diagonali è un assintoto, e l'altra diagonale è parallela al secondo assintoto (2).

Che l'altra diagonale  $AB$  sia parallela al secondo assintoto risulta dal segare colla  $AB$  il fascio armonico (N° 225) formato dai due assintoti e dai due diametri coniugati  $OA$ ,  $OB$ . Siccome la sezione di un assintoto è il punto di mezzo di  $AB$ , così la sezione dell'altro sarà all'infinito (N° 51).

(1) Per rendersi conto de' segni, basta osservare che nel caso dell'ellisse  $OP$ ,  $OP'$  hanno lo stesso senso, mentre  $AX$ ,  $AX'$  hanno sensi opposti; nel caso dell'iperbole  $OP$  ed  $OP'$  sono opposti,  $AX$  ed  $AX'$  sono nello stesso senso.

(2) APOLLONIO, I. c., II, 4.

f) Sia  $X_1$  il punto il cui diametro  $OX$  incontra la tangente in  $A_1$ . Siccome  $OX'$ ,  $OX_1$  sono (c) due rette reciproche passanti per un punto della  $AA_1$ , corda di contatto delle tangenti  $AX$ ,  $A_1X_1$ , così (N° 204) la congiungente  $X'X_1$  sarà una tangente della conica.

Il punto di contatto di questa tangente è  $M$ , punto comune alle  $AP$ ,  $A_1P'$  (N° 244).

g) Osserviamo ancora che  $X'X_1$  è una diagonale del parallelogrammo contenuto dalle tangenti in  $A$ ,  $A_1$  e dalle parallele ad  $AA_1$  tirate per  $P$ ,  $P'$ ; al quale risultato si giunge anche colla considerazione seguente. I punti di un diametro hanno per polari le parallele al diametro conjugato (N° 212); dunque, essendo  $P$ ,  $P'$  due punti reciproci, condotte per essi le parallele ad  $AA_1$ , la prima sarà la polare di  $P'$ , la seconda la polare di  $P$ ; epperò esse parallele sono anche rette reciproche. Se ora applichiamo il teorema del N° 204 a queste rette reciproche ed alle due tangenti in  $A$ ,  $A_1$ , otteniamo la seguente proprietà:

Se in un parallelogrammo due lati opposti sono tangenti alla conica, e gli altri due lati sono rette reciproche parallele al diametro conjugato a quelle tangenti, le diagonali sono pur esse tangenti alla conica.

h) Si ha così la seguente soluzione del problema:

Costruire per tangenti la conica della quale siano dati in grandezza e posizione due diametri conjugati  $AA_1$ ,  $BB_1$ .

Supposto essere  $BB_1$  il diametro che non sega la conica, allorchè questa è un'iperbole, si determini in esso una coppia di punti  $P$ ,  $P'$  conjugati nell'involuzione che ha il punto centrale in  $O$  (centro della curva), e  $BB_1$  per punti doppi nel caso dell'ellisse, o per punti conjugati nel caso dell'iperbole. Condotte per  $A$ ,  $A_1$  le parallele a  $BB_1$  e per  $P$ ,  $P'$  le parallele ad  $AA_1$ , le diagonali del parallelogrammo risultante saranno tangenti della conica cercata.

k) I segmenti  $AX$ ,  $A_1X_1$  sono uguali ed opposti; ma si è veduto (d) essere  $AX \cdot AX' = \mp OB^2$ , dunque  $AX \cdot A_1X_1 = \pm OB^2$ ; vale a dire:

Il rettangolo de' segmenti che una tangente variabile ( $X'X_1$ ) fa su due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costantemente uguale al quadrato ( $\pm OB^2$ ) del semidiametro parallelo alle tangenti fisse (1).

(1) Cfr. N° 123.

d) Siccome la retta  $OB$  divide per metà la striscia compresa fra le  $AX, A_1X_1$ , così i segmenti che le  $AM, A_1M$  determinano risp. sulle  $A_1X_1, AX$  (a partire da  $A_1, A$ ) sono doppi di  $OP, OP'$ . Ma pel teorema a), si ha  $OP \cdot OP' = \text{cost.}^*$ ; dunque:

Le rette condotte dagli estremi di un diametro dato ad un punto qualunque della conica determinano sulle tangenti conjugate al diametro due segmenti (a partire dai punti di contatto), il cui prodotto è costante (1).

b) Siccome (N° 216) il punto  $X$  è quello in cui la tangente in  $A$  è incontrata dalla tangente parallela ad  $X'X_1$ , così l'enunciato (k) può anche esprimersi così:

Il rettangolo de' segmenti ( $AX, AX'$ ) che due tangenti parallele variabili fanno su di una tangente fissa, è costantemente uguale al quadrato ( $\pm OB^2$ ) del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

m) Il teorema del N° 244 serve anche a risolvere il problema:

Di una conica sono dati due punti  $A, A_1$  estremi di un diametro, un terzo punto  $M$ , e la direzione del diametro conjugato ad  $AA_1$ ; trovare la grandezza del secondo diametro.

Conducasi per  $O$ , punto di mezzo di  $AA_1$ , il diametro del quale è data la direzione, e questo si tagli colle congiungenti  $AM, A_1M$  ne' punti  $P, P'$ ; indi si prenda  $OB$  media proporzionale fra  $OP, OP'$ : sarà  $OB$  la metà della grandezza cercata.

n) Il teorema d) dà una costruzione delle coppie dei diametri conjugati, ed in particolare degli assi di un'ellisse, della quale siano dati in grandezza e direzione due semidiametri conjugati  $OA, OB$  (fig. 177\*). Condotta per  $A$  la parallela ad  $OB$ , questa sarà la tangente in  $A$ , e due diametri conjugati qualsivogliano la incontreranno in due punti  $X, X'$ , tali che si avrà  $AX \cdot AX' = -OB^2$ . Dunque se nella normale in  $A$  si prendono due segmenti  $AC, AD$  uguali ad  $OB$ , ogni circolo descritto per  $C$  e  $D$  taglierà la suddetta tangente in due punti  $X, X'$  dotati di quella proprietà, cioè in due punti che uniti ad  $O$  danno le direzioni di due diametri conjugati. Se il circolo si fa passare per  $O$ , l'angolo  $XOX'$  sarà retto, epperò  $OX, OX'$  saranno le direzioni degli assi (2).

**245.** Per le estremità  $A, A'$  (fig. 178\*) di due semidiametri conjugati  $OA, OA'$  di una conica si conducano, in una direzione arbi-

(1) APOLLONIO, I. c., lib. III, 53.

(2) Cfr. CHASLES, *Aperçu hist.*, p. 45 e 362; *Sections coniques*, N° 205.

traria, due corde parallele  $AB, A'B'$  (<sup>1</sup>). Per costruire i punti  $B, B'$ , basta congiungere i poli di detto corde; la congiungente sarà il diametro  $OX$  che contiene i punti di mezzo delle corde medesime.

Sia  $OX'$  il diametro conjugato ad  $OX$ , cioè il diametro parallelo alle corde  $AB, A'B'$ . I gruppi di quattro raggi  $O(XX'AB)$ ,  $O(XX'A'B')$  sono armonici (N° 51), epperò proiettivi; dunque le coppie di raggi  $O(XX'. AA'. BB')$  sono in involuzione (N° 94). Ma le coppie  $O(XX'. AA')$  determinano l'involuzione de' diametri conjugati (N° 98, 225), dunque anche  $OB, OB'$  sono due semidiametri conjugati. Ossia:

Se dai termini  $A, A'$  di due semidiametri conjugati si tirano due corde parallele  $AB, A'B'$ , i punti  $B, B'$  saranno termini di altri due semidiametri conjugati.

Due diametri  $AA, BB$  determinano quattro corde  $AB$  che sono i lati di un parallelogrammo (N° 194, 215). I diametri risp. conjugati  $A'A', B'B'$  danno in ugual modo un altro parallelogrammo, i cui lati sono paralleli a quelli del primo; cioè ogni corda  $AB$  è parallela a due corde  $A'B'$  e non parallela a due altre corde  $A'B'$ .

a) Siano  $H, K$  i punti in cui  $AB$  è incontrata dalle  $OA', OB'$ ; il semidiametro  $OX$ , che divide per metà  $A'B'$ , passerà anche pel punto di mezzo di  $HK$ , cioè  $AB$  ed  $HK$  hanno lo stesso punto di mezzo; dunque  $AH = KB$  ed  $AK = HB$ . I triangoli  $OAH, OBK$  sono perciò equivalenti (<sup>2</sup>); e così pure i triangoli  $AHB', BKA'$ ; epperò anche i triangoli  $OAB', OA'B$ . Ossia:

Il parallelogrammo costruito su due semidiametri ( $OA, OB$ ) è equivalente al parallelogrammo costruito sui due semidiametri risp. conjugati.

In modo analogo si dimostra l'equivalenza de' triangoli  $OAB, OA'B$ .

Per la medesima ragione sono equivalenti i triangoli  $AKA'$  e  $BHB'$ , ed i triangoli  $OAK$  ed  $OBH$ , epperò anche i triangoli  $OAA', OBB'$ ; ossia:

Il parallelogrammo costruito su due semidiametri conjugati ha un'area costante (<sup>3</sup>).

(<sup>1</sup>) Nel caso che la conica sia un'iperbole, se  $A$  è un punto della curva,  $A'$  sarà l'estremo di un diametro ideale, definito come ai N° 218 b), 223. In questo caso anche  $A'B'$  sarà una corda ideale.

(<sup>2</sup>) BALTZER, *Planim.*, p. 404.

(<sup>3</sup>) APOLLONIO, *I. c.*, lib. VII, 34, 32.

b) Siano  $M, N$  i punti di mezzo delle corde non parallele  $AB, A'B'$ . Siccome (N° 215)  $AB, A'B'$  hanno le direzioni di due diametri coniugati, e siccome  $ON$  è il diametro coniugato alla corda  $A'B'$ , così sarà  $ON$  parallela ad  $AB$ ; e similmente sono parallele le  $OM, A'B'$ ; gli angoli  $OMA, ONA'$  sono perciò uguali o supplementari; e siccome i triangoli  $OMA, ONA'$  sono equivalenti, perchè metà de' triangoli equivalenti  $OAB, OA'B'$ , così si avrà l'uguaglianza

$$OM \cdot AM = \pm ON \cdot NA' \quad (1).$$

Proiettinsi ora (fig. 178\*,  $a$  e  $b$ ) i punti  $AMBA'NB'$  dal punto all'infinito di  $OB$  sulla  $BB'$ . Il rapporto dei segmenti paralleli  $AM$  ed  $ON$ ,  $OM$  ed  $NA'$  è uguale a quello delle loro proiezioni; così che dall'uguaglianza suesposta si dedurrà che il rettangolo delle proiezioni di  $OM, AM$  è uguale al rettangolo delle proiezioni di  $ON, NA'$ . Siccome i raggi proiettanti sono paralleli ad  $OB$ , così le proiezioni di  $OM, MA$  sono entrambe uguali alla metà della proiezione di  $BA$ , ossia a quella di  $OA$ . Essendo  $N$  il punto medio di  $A'B'$ , la proiezione di  $ON$  sarà la semisomma delle proiezioni di  $OA', OB'$ ; e la proiezione di  $NA'$  sarà metà della proiezione di  $A'B'$ , cioè la semidifferenza delle proiezioni di  $OA', OB'$ . Epperò si ha

$$(\text{proj. } OA')^2 = \pm \text{proj. } (OA' + OB') \times \text{proj. } (OB' - OA')$$

ossia

$$(\text{proj. } OA')^2 \pm (\text{proj. } OA')^2 = (\text{proj. } OB')^2.$$

c) Analogamente, se si proiettassero que'medesimi punti su  $OB$ , mediante raggi paralleli ad  $OB'$  (fig. 178\*,  $c$ ), si otterrebbe

$$(\text{proj. } OA')^2 \pm (\text{proj. } OA')^2 = (\text{proj. } OB')^2.$$

Vale a dire:

Se due semidiametri coniugati qualsivogliano si proiettano sopra un diametro fisso, mediante raggi paralleli al diametro coniugato a quest'ultimo, la somma (per

(\*) Il doppio segno, cagionato dalla direzione relativa de' segmenti  $OM, NA'$ , e de' segmenti  $ON, AM$ , corrisponde al caso dell'ellisse (fig. 178\*,  $a$ ) ed a quello dell'iperbole (fig. 178\*  $b$  e  $c$ ).

l'ellisse) o la differenza (per l'iperbole) dei quadrati delle proiezioni è costantemente uguale al quadrato del semidiametro fisso.

La somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali di un segmento sopra due rette fra loro perpendicolari è uguale al quadrato del segmento, in virtù del teorema pitagorico (1); dunque, se due diametri coniugati si proiettano ortogonalmente sull'uno e sull'altro asse della conica, e se si fa la somma dei quadrati delle proiezioni di ciascun diametro sui due assi, si ottiene il teorema:

La somma (per l'ellisse) o la differenza (per l'iperbole) dei quadrati di due semidiametri coniugati qualsivogliano è costante, cioè sempre uguale alla somma dei quadrati dei semiassi (2).

246. I lati  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  di un triangolo (fig. 179\*) seghino una conica nelle coppie di punti  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ . Considerando il triangolo anzidetto, i cui lati incontrano le trasversali  $DE$ ,  $D'E'$  ne' punti  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $GG'$ , si hanno pel teorema di MENELAUS (N° 104, b) le uguaglianze:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AG}{BG} = 1, \quad \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AG'}{BG'} = 1.$$

Il quadrangolo  $DEF'D'$  è inscritto nella conica; la trasversale  $AB$  taglia i suoi lati opposti e la conica in tre coppie di punti  $AB$ ,  $GG'$ ,  $FF'$ , che sono in involuzione, pel teorema di DESARGUES (N° 143); dunque si avrà (N° 94) l'uguaglianza di rapporti anarmonici  $(ABFG) = (BAF'G')$ , dalla quale  $(ABFG) = (ABG'F')$ , ossia  $(ABFG) : (ABG'F') = 1$ , che è quanto dire

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{AF'}{BF'} : \frac{AG}{BG} \cdot \frac{AG'}{BG'} = 1.$$

Questa uguaglianza e le prime due, moltiplicate fra loro, danno la:

$$(1) \quad \frac{BD}{CD} \cdot \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{AF'}{BF'} = 1$$

relazione esprimente un celebre teorema dovuto a CARNOT (3).

(1) BALTZER, *Planim.*, 404.

(2) APOLLONIO, *I. c.*, lib. VII, 42, 43, 22, 25.

(3) *Géométrie de position*, p. 437.

a) Viceversa, se sui lati  $BC, CA, AB$  si hanno tre coppie di punti  $DD', EE', FF'$ , e se i segmenti da essi determinati insieme coi vertici soddisfanno alla relazione (1), questi sei punti apparterranno ad una stessa conica. Infatti, descrivasi la conica determinata dai cinque punti  $DD'EE'F$ , e sia  $F''$  il punto in cui essa segnerà di nuovo  $AB$ . Avremo allora, in virtù del teorema di CARNOT, una relazione che differirà dalla (1) in ciò che il punto  $F''$  sarà surrogato da  $F''$ . Questa relazione confrontata colla (1) dà  $AF'' : BF'' = AF''' : BF'''$ , donde  $(ABF''F''') = 1$ , ossia  $(F''F''BA) = 1$ ; dunque (N° 57, e)  $F''$  ed  $F'''$  coincidono.

b) Se il punto  $A$  si allontana all'infinito (fig. 180\*), i rapporti  $AF : AE, AF' : AE'$  tendono verso l'unità; perciò l'equazione (1) diviene in questo caso

$$(2) \quad \frac{BD \cdot BD'}{CD \cdot CD'} \cdot \frac{CE \cdot CE'}{BF \cdot BF''} = 1.$$

Conducasi parallelamente a  $BC$  una retta che seghi  $CEE'$  in  $Q$  e la conica in  $PP'$ ; la formola precedente applicata alle trasversali  $DD', PP'$ , darà

$$\frac{QE \cdot QE'}{CE \cdot CE'} \cdot \frac{CD \cdot CD'}{QP \cdot QP'} = 1,$$

e moltiplicando fra loro le ultime due equazioni,

$$\frac{BD \cdot BD'}{BF \cdot BF''} = \frac{QP \cdot QP'}{QE \cdot QE'},$$

vale a dire:

Se per un punto qualsivoglia ( $Q$ ) si conducono ad una conica due trasversali in direzioni date, il rapporto dei prodotti dei segmenti ( $QP \cdot QP' : QE \cdot QE'$ ) che la curva fa su di esse, a partire dal loro punto comune, è costante (1).

c) Se nella formola (2) si suppone che la conica sia un'iperbole, e invece di  $BC$  si assuma un suo assintoto  $HK$ , il rapporto  $HD \cdot HD' : KD \cdot KD'$  avrà il valore 1, epperò

$$HF \cdot HF'' = KE \cdot KE',$$

(1) APOLLONIO, *l. c.*, lib. III, 16-23. — DESARGUES, *l. c.*, p. 202. — DELAHIRE, *l. c.*, V, 10, 12.

ossia:

Se per un punto qualunque  $H$  (ossia  $H'$ ) di un assintoto si conduce una trasversale in direzione data a segare l'iperbole in due punti  $F, F'$  (ossia  $D, D'$ ), il rettangolo de' segmenti  $HF \cdot HF'$  (ossia  $H'D \cdot H'D'$ ) è costante.

Se il diametro parallelo alla direzione data  $H'D$  incontra la curva in due punti  $S, S'$ , e sia  $O$  il centro, avremo

$$HD \cdot HD' = OS \cdot OS' = -\overline{OS}^2$$

Se il diametro  $OT$  parallelo alla direzione data  $HF$  non sega la curva, si potrà condurre una tangente parallela ad esso: e pressane la porzione compresa fra l'assintoto e il punto di contatto, il quadrato di questa porzione sarà uguale a  $HF \cdot HF'$ , appunto in virtù dell'attuale teorema. Ma quella porzione è uguale al semidiametro parallelo  $OT$  (N° 244, e), dunque  $HF \cdot HF' = \overline{OT}^2$ . Ossia:

Se una retta sega l'iperbole in  $F, F'$  (in  $D, D'$ ) ed un assintoto in  $H$  (in  $H'$ ) il prodotto  $HF \cdot HF'$  (il prodotto  $H'D \cdot H'D'$ ) è uguale a  $\pm$  il quadrato del semidiametro  $OT$  ( $OS$ ) parallelo alla segante; valendo il segno  $+$  o il segno  $-$ , secondo che la curva ha o non ha tangenti parallele alla segante.

d) Se la segante incontra l'altro assintoto in  $L$  (in  $L'$ ), avremo (N° 151)  $HF' = FL$  (ossia  $H'D' = DL'$ ), epperò anche  $FH \cdot FL = -\overline{OT}^2$  (ossia  $DH \cdot DL' = -\overline{OS}^2$ ); cioè:

Se una retta condotta da un punto  $F(D)$  dell'iperbole sega gli assintoti in  $H, L$  (in  $H', L'$ ), il prodotto  $FH \cdot FL$  ( $DH' \cdot DL'$ ) è uguale a  $\mp$  il quadrato del semidiametro parallelo alla segante ( $-$  o  $+$ , secondo che la curva abbia o non abbia tangenti parallele alla segante).

e) Di qui si trae una maniera di costruire gli assi di un'iperbole, della quale siano dati in grandezza e direzione due semidiametri coniugati  $OF, OT$  (fig. 181<sup>a</sup>). S'incominci dal costruire gli assintoti. A quest'uopo, se  $OF$  è il diametro che deve segare la curva, tirisi per  $F$  la parallela ad  $OT$ ; essa sarà la tangente in  $F$ ; e prese nella medesima le parti  $FP, QF$  uguali ad  $OT$ , saranno  $OP, OQ$  gli assintoti (N° 244, e). Ora, per ottenere le direzioni  $OX, OY$  degli assi, basterà trovare le bisettrici degli angoli degli assintoti, ossia i due raggi coniugati ortogonali dell'involuzione i cui raggi doppi sono  $OP, OQ$  (N° 225, 226).



Per  $F$  guidisi la parallela ad  $OX$ , sino a segare gli assintoti in  $B, B'$ ; facciasi in  $OX$  il segmento  $OS$  medio proporzionale fra  $FB, FB'$ ; sarà  $OS$  la grandezza del semiasse diretto secondo  $OX$ , il quale segnerà o no la curva, secondo che i segmenti  $FB, FB'$  hanno lo stesso senso o sensi opposti. Da ultimo, costruito il parallelogrammo, un lato del quale sia  $OS$ , un altro lato sia diretto secondo  $OY$  e una diagonale secondo un assintoto, il lato  $OR$  sarà la grandezza dell'asse diretto secondo  $OY$  (N° 244,  $e$ ).

f) Nel piano di un triangolo  $ABC$  abbiansi due punti  $O, O'$ ; le  $OA, OB, OC$  incontrino risp. i lati opposti  $BC, CA, AB$ , in  $D, E, F$ ; avremo pel teorema di Ceva (N° 104,  $a$ ):

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -1.$$

Similmente, se le  $O'A, O'B, O'C$  incontrano i lati opposti in  $D', E', F'$ , si avrà

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = -1.$$

Moltiplicando fra loro queste due equazioni, si ottiene la (1); dunque:

Se da due punti arbitrari si proiettano i vertici di un triangolo risp. sui lati opposti, si ottengono sei punti, pei quali passa una conica.

Per esempio: i punti di mezzo dei lati di un triangolo e i piedi delle perpendicolari abbassate dai vertici opposti sui lati stessi sono sei punti di una conica (<sup>1</sup>).

**247. PROBLEMA.** — Costruire una conica che passi per tre punti dati  $ABC$  e rispetto alla quale siano reciproci i punti coniugati di un'involuzione data in una retta  $u$  (fig. 182<sup>a</sup>).

Le rette  $AB, AC$  incontrino  $u$  in  $D, E$ , i coniugati dei quali, nell'involuzione data, siano  $D', E'$ . Sia poi  $D''$  il punto separato armonicamente da  $D$  mediante  $A$  e  $B$ ; ed  $E''$  il punto armonicamente separato da  $E$  mediante  $A$  e  $C$ . Allora, essendo  $D$  reciproco sì a  $D'$ , sì a  $D''$ , sarà  $D'D''$  la polare di  $D$ ; e similmente  $E'E''$  sarà la polare di  $E$ .

Conducansi le  $BE, CD$  sino a segare risp. le  $E'E'', D'D''$  in punti  $E_0, D_0$  che saranno reciproci il primo ad  $E$ , il secondo a  $D$ . Perciò, se si costruiranno i punti  $B', C'$  in modo che i gruppi  $BB'E_0, CC'D_0$  siano armonici, i punti  $B', C'$  apparterranno alla curva domandata.

Nella figura le coppie  $FF', GG'$  sono quelle che individuano in  $u$  la data involuzione di punti reciproci.

**248. PROBLEMA.** — Costruire la conica che passa per quattro punti dati  $QRST$  e che divide armonicamente un dato segmento  $MN$  (fig. 183<sup>a</sup>).

La retta  $MN$  seghi le coppie di lati opposti del quadrangolo  $QRST$  in  $A$  ed  $A', B$  e  $B'$ . Se la conica cercata incontra la  $MN$  in due punti, questi

(<sup>1</sup>) Che è un cerchio. Cfr. STEINER nel t. XIX degli *Annales de Mathématiques* (Montpellier 1828), p. 42.

formeranno una coppia dell'involuzione determinata da  $AA', BB'$  (N° 143). Per conseguenza, se l'involuzione i cui punti doppi sono  $MN$  e l'involuzione determinata dalle coppie  $AA', BB'$  hanno una coppia comune  $PP'$ , la conica cercata passerà per ciascuno de' punti  $P, P'$  (N° 96 a, 164).

Per costruire questi punti, si descriva un cerchio ad arbitrio (N° 164), e da un punto  $O$  di esso si proiettino sulla circonferenza i punti  $AA'BB'MN$  in  $A_1A_1'B_1B_1'M_1N_1$  (\*). Se  $V$  è il punto comune alle  $A_1A_1', B_1B_1'$ , e se  $U$  è il punto comune alle tangenti in  $M_1, N_1$ , le rette per  $U$  e le rette per  $V$  determinano sulla circonferenza, e quindi (mediante proiezione da  $O$ ) sulla retta  $MN$  le coppie di punti coniugati dell'una e dell'altra involuzione. Tirata la  $UV$ , so questa incontra il cerchio in due punti, proiettando questi da  $O$ , si avranno i punti cercati  $P, P'$ .

Sia  $W$  il polo della  $UV$  rispetto al cerchio. Ogni retta per  $W$ , la quale seghi il cerchio, determina su di questo e quindi sulla  $MN$  due punti separati armonicamente mediante  $PP'$ , cioè due punti reciproci rispetto alla conica cercata. Dunque, se la  $UV$  non sega il cerchio, onde non si possano costruire i punti  $PP'$ , tireremo per  $W$  due rette a segare il cerchio; progetteremo da  $O$  i punti d'intersezione sulla  $MN$ , ed ivi interterremo due coppie di punti, che individueranno l'involuzione de' punti reciproci rispetto alla conica. Il problema sarà così ridotto a quello che è trattato nel N° precedente.

**249. PROBLEMA.** — Costruire la conica che passa per quattro punti dati  $QRST$  e per due punti coniugati (non dati) di un'involuzione data in una retta  $\alpha$ .

Questo problema è analogo al precedente; giacchè si tratta di costruire la coppia di punti coniugati comune all'involuzione data e a quella che è determinata in  $\alpha$  dalle paia di lati opposti del quadrangolo  $QRST$  (N° 143). La coppia cercata esiste realmente, se l'involuzione data non ha punti doppi; e i punti che la costituiscono appartengono alla conica cercata. Se l'involuzione data ha due punti doppi  $M, N$ , il problema attuale coincide assolutamente con quello del N° 248.

Questo problema e i due che precedono ammettono evidentemente una soluzione unica.

**250.** Si consideri un'iperbole i cui assintoti siano ortogonali (fig. 184\*). Siccome gli assintoti separano armonicamente due diametri coniugati qualsivogliano (N° 225), così gli angoli dei due diametri coniugati avranno gli assintoti per bisettrici (N° 52). Ma i due semidiametri coniugati sono i lati di un parallelogrammo le cui diagonali hanno le direzioni degli assintoti (N° 244, e); questo parallelogrammo sarà adunque un rombo, vale a dire, ogni

(\*) Vedi la prima Nota a piè della pagina 409.

diametro è uguale al suo conjugato. Per questa proprietà, l'iperbole nel caso che si considera dicesi equilatera <sup>(1)</sup>.

a) Siccome le rette condotte da un punto qualunque  $M$  della curva ai termini  $P, P'$  di un diametro hanno le direzioni di due diametri conjugati (N° 215), così sono uguali (e di senso opposto) gli angoli che le  $PM, P'M$  fanno con ciascun assintoto. Se i punti  $P, P'$  restano fissi, mentre  $M$  percorra la curva, i raggi  $PM, P'M$  descrivono due fasci inversamente uguali (N° 80, b).

b) Viceversa, i raggi corrispondenti di due fasci inversamente uguali si segano in punti il cui luogo è un'iperbole equilatera. Che questo luogo debba essere una conica, risulta dall'essere i due fasci proiettivi (N° 78). Ciascuno di questi ha due raggi fra loro perpendicolari, i quali sono ordinatamente paralleli ai corrispondenti dell'altro fascio (N° 80, b); dunque la conica ha due punti all'infinito, situati in due direzioni ortogonali; vale a dire, essa è un'iperbole equilatera. I centri  $P, P'$  de' due fasci sono i termini di un diametro; infatti la tangente  $p$  in  $P$  è il raggio corrispondente alla  $P'P$  riguardata come raggio  $p'$  del 2° fascio; e la tangente  $q'$  in  $P'$  corrisponde alla  $PP'$  considerata come raggio  $q$  del 1° fascio (N° 114, a). Ma gli angoli  $pq, p'q'$  devono essere uguali ed opposti; dunque, essendo  $p'$  e  $q$  una sola e medesima retta, le  $p, q'$  sono parallele.

c) I vertici di un triangolo  $ABC$ , ed il punto  $D$  comune alle sue altezze sono i vertici di un quadrangolo completo, nel quale ciascun lato è perpendicolare al suo opposto, ed i cui sei lati determinano sulla retta all'infinito tre coppie di punti che da un punto arbitrario  $S$  si proiettano mediante tre coppie di rette ortogonali. Queste tre coppie appartengono dunque ad un'involuzione, nella quale ogni raggio è perpendicolare al suo conjugato (N° 101 a sinistra, 95, 163).

Ma quest'involuzione di raggi proietta da  $S$  quell'involuzione di punti che, in virtù del teorema di DESARGUES (N° 143), è segnata sulla retta all'infinito dalle coppie di lati opposti del quadrangolo e dalle coniche (iperboli <sup>(2)</sup>) ad essi circoscritte. Dunque le coppie di raggi conjugati della prima involuzione danno le direzioni degli assintoti di queste coniche; ossia :

(1) APOLLONIO, *I. c.*, lib. VII, 24. — DELAHIRE, *I. c.*, V, 13.

(2) Nessuna ellisse, nè alcuna parabola è circoscritta al quadrangolo in discorso (N° 170, a).

Tutte le coniche passanti pei vertici e pel concorso delle altezze di un triangolo sono iperboli equilatera.

d) Viceversa, se per tre vertici  $ABC$  di un triangolo si descrive una iperbole equilatera, essa passerà necessariamente anche pel punto  $D$  comune alle altezze. Infatti, s'imagini un'altra iperbole determinata (N° 125) dai quattro punti  $ABCD$  e da uno de' punti all'infinito della iperbole data; essa sarà equilatera in virtù del teorema che precede, epperò passerà anche pel secondo punto all'infinito della data. Le due iperboli hanno così cinque punti comuni ( $A, B, C$  e due punti all'infinito), dunque esse coincidono (N° 116, b), c. d. d. Dunque:

In ogni triangolo inscritto in un'iperbole equilatera, il punto comune alle altezze è situato nella curva.

e) Se il punto  $D$  s'accosta infinitamente ad  $A$ , cioè se l'angolo  $BAC$  divien retto, ne risulta:

In ogni triangolo rettangolo  $EFG$  (fig. 184\*) inscritto in un'iperbole equilatera, la tangente al vertice  $E$  dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa.

f) Per quattro punti dati  $QRST$  passa una ed una sola iperbole equilatera (N° 249). Il punto comune alle altezze in uno qualunque de' triangoli  $QRS, RST, STQ, QRT$  appartiene alla curva (1).

**251.** Abbiasi una conica, un punto  $S$  e la sua polare  $s$ . Una retta per  $S$  incontri la conica in  $A, A'$ . Se si vuol costruire la figura omologica alla conica data (N° 18), assumendo  $S$  come centro d'omologia,  $s$  come asse d'omologia, e  $A'$  come punto corrispondente ad  $A$ , ogni altro punto  $B'$  corrispondente ad un punto  $B$  della conica sarà situato nella conica medesima. Infatti, se  $AB$  incontra  $s$  in  $P$ , il punto  $B'$  comune ad  $SB, A'P$  è un punto della curva (N° 186). Dunque la curva omologica alla data sarà la data medesima. Due punti (o due rette) corrispondenti sono separati armonicamente mediante  $S$  ed  $s$  (2).

Alla retta all'infinito corrisponderà adunque la retta  $j$  parallela ad  $s$  ed equidistante da  $s$  e da  $S$ ; ed i punti in cui  $j$  incontra la conica corrisponderanno ai punti all'infinito della conica medesima.

(1) Teoremi di BRIANCHON e PONCELET in una memoria inserita nel t. XI degli *Annales de Mathématiques* (Montpellier 1821), e riprodotta nel t. 2° (p. 504) delle *Applications d'analyse et de géométrie* di PONCELET (Paris 1864).

(2) Questa è la così detta omologia armonica: cfr. BELLAVITIS, *Saggio di Geometria derivata* (vol. 6 dei Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, 1838), § 50.

Di qui si cava una regola assai semplice per conoscere se un arco dato di conica, piccolo quanto si voglia, appartenga ad un'ellisse, ad una parabola o ad un'iperbole. Nell'arco si tiri una corda  $s$  e si costruisca il polo  $S$ ; indi si conduca la  $j$  parallela ad  $s$  ed equidistante da  $S$  e da  $s$ . Se  $j$  non incontra l'arco, questo appartiene ad un'ellisse (fig. 185<sup>a</sup>, a). Se  $j$  tocca l'arco in un punto  $J$ , l'arco appartiene ad una parabola, della quale  $SJ$  sarà un diametro (fig. 185<sup>a</sup>, b); finalmente, se  $j$  sega l'arco in due punti  $J_1, J_2$  (fig. 185<sup>a</sup>, c), la curva sarà un'iperbole, avente gli assintoti paralleli ad  $SJ_1, SJ_2$  (1).

**252. PROBLEMA.** — Dati di posizione due diametri coniugati, ed inoltre una tangente  $\alpha$  il punto di contatto, costruire la curva (fig. 186<sup>a</sup>).

La tangente data incontra in  $P, Q$  i diametri dati, il cui punto comune sia  $O$ . Proiettisi il punto di contatto  $M$  in  $P'$  sulla  $OP$  mediante una parallela ad  $OQ$ , e in  $Q'$  sulla  $OQ$  mediante una parallela ad  $OP$ . Ogni punto di  $OP$  è polo di una retta parallela ad  $OQ$ ; inoltre  $P, M$  sono punti reciproci, giacchè la polare di  $M$ , che è la tangente, passa per  $P$ . Dunque la polare di  $P$  è  $MP'$ , epperò anche  $P, P'$  sono punti reciproci. Allora facciasi  $OA = OA'$  media proporzionale fra  $OP$  ed  $OP'$ , e sarà  $AA'$  la grandezza del diametro diretto secondo  $OP$  (N° 218, a). Similmente, si avrà la grandezza  $BB'$  dell'altro diametro, prendendo  $OB = OB'$  media proporzionale fra  $OQ, OQ'$ .

Se i punti  $P, P'$  cadono da una stessa parte rispetto ad  $O$ , l'involuzione de' punti reciproci ha due punti doppi  $A, A'$  (N° 98), cioè il diametro  $OP$  sega la curva. Se invece  $O$  è fra  $P, P'$ , l'involuzione non ha punti doppi, il diametro non incontra la curva. In questo caso,  $A, A'$  sono due punti reciproci che equidistanno da  $O$ .

La figura presenta due casi: quello dell'ellisse (a) e quello dell'iperbole (b).

**253. PROBLEMA.** — Date di posizione due coppie di diametri coniugati  $a$  ed  $a', b$  e  $b'$ , ed inoltre un punto  $M$ , costruire la conica.

**1° SOLUZIONE** (fig. 187<sup>a</sup>). — Da  $M$  conducasi parallelamente a ciascun diametro una corda il cui punto di mezzo cada nel diametro coniugato. I secondi estremi  $A, A', B, B'$  delle quattro corde così condotte saranno punti della conica cercata (N° 206).

**2° SOLUZIONE** (fig. 188<sup>a</sup>). — S'indichi con  $c$  il diametro  $MM'$ , e si costruisca il raggio  $c'$  coniugato di  $c$  nell'involuzione determinata dalle coppie  $aa', bb'$ ; sarà  $c'$  il diametro coniugato di  $c$  (N° 225). Per  $M, M'$  conducansi risp. le parallele ad  $a, a'$ , le quali si segheranno in un punto della curva (N° 216) ed incontreranno  $c'$  in  $P, P'$ . Questi punti sono dunque reciproci (N° 244); così che prendendo in  $c'$  due altri punti  $Q, Q'$  coniugati nell'involuzione determinata dalla coppia  $PP'$  e dal punto centrale  $O$ , le  $MQ, MQ'$  si segheranno in un punto della curva. Se poi in  $c'$  si fa  $ON = ON'$  media proporzionale fra  $OP, OP'$ , saranno  $N, N'$  gli estremi del diametro  $c'$  (N° 218, a).

(1) PONCELET, *l. c.*, N° 225 e 226.

**3° SOLUZIONE.** — Dai termini  $M, M'$  del diametro che passa pel punto dato conducansi le parallele ad  $a, a'$ , che si segheranno in un punto  $A$  della curva, e le parallele a  $b, b'$ , che si segheranno in un altro punto  $B$  della curva medesima (N° 216). Indi, prolungando  $AO, BO$  in  $A', B'$  in modo che sia  $OA' = AO, OB' = BO$ , anche  $A', B'$  saranno punti della conica cercata (N° 210).

**254. PROBLEMA.** — Costruire la conica della quale si conoscano di posizione due coppie di diametri coniugati  $aa', bb'$  ed una tangente  $t$ .

**1° SOLUZIONE.** — Si costruisca la tangente  $t'$  parallela a  $t$  (distante dal centro quanto lo è  $t$ ); congiungendo i punti in cui  $t, t'$  segano  $a, a'$ , si avranno due altre tangenti  $uu'$  parallele (N° 216); ed un terzo pajo  $vv'$  si otterrà unendo i punti d'intersezione di  $t, t'$  con  $b, b'$  (fig. 189°).

**2° SOLUZIONE.** — I diametri coniugati  $a$  ed  $a', b$  e  $b'$  incontrino  $t$  ne' punti  $A$  ed  $A', B$  e  $B'$ . Le coppie di punti  $AA', BB'$  determinano un'involuzione il cui punto centrale è il punto di contatto di  $t$  (N° 244, c). Così il problema è ridotto ad uno già risoluto (N° 252). Se l'involuzione ha punti doppi, congiungendoli ad  $O$ , si otterranno gli assintoti.

**255. PROBLEMA.** — Costruire la conica della quale siano dati di posizione due diametri coniugati  $a, a'$  ed inoltre due punti  $M, N$  (fig. 190°).

Siano  $M', N'$  i secondi estremi de' diametri passanti pei punti dati. Per  $M, M'$  conducansi le  $MH, M'H$  parallele ad  $a, a'$ ; e similmente per  $N, N'$  le  $NK, N'K$  parallele ad  $a, a'$ . I punti  $H, K$  apparterranno alla curva da costruirsi (N° 216).

**PROBLEMA.** — Costruire la conica della quale siano dati di posizione due diametri coniugati  $b, b'$  ed inoltre due tangenti  $m, n$  (fig. 191°).

Costruiscansi le tangenti  $m'$  parallela ad  $m$  ed  $n'$  parallela ad  $n$ ; congiungansi i punti in cui  $m, m'$  segano  $a, a'$ ; e così pure i punti in cui  $n, n'$  segano  $a, a'$ . Le congiungenti  $t$  e  $t', u$  ed  $u'$  sono altrettante tangenti della curva cercata (N° 216).

**256. PROBLEMA.** — Dati cinque punti di una conica, costruire due diametri coniugati che comprendano un angolo dato (<sup>1</sup>).

Si trovi un diametro  $AA'$  della conica (N° 213); su di esso si descriva un segmento di cerchio capace dell'angolo dato, e si cerchino i punti in cui la circonferenza sega di nuovo la conica (N° 176, b). Se uno di questi punti è  $M$ , le  $AM, A'M$  avranno le direzioni di due diametri coniugati. Ma l'angolo  $AMA'$  è uguale al dato; dunque conducendo i diametri paralleli ad  $AM, A'M$ , questi risolveranno il quesito.

Se il segmento descritto è il semicerchio, l'attuale costruzione dà gli assi.

**257. PROBLEMA.** — Costruire la conica rispetto alla quale un dato triangolo  $EFG$  sia coniugato, e un dato punto  $P$  sia il polo di una data retta  $p$  (<sup>2</sup>).

La retta data  $p$  incontri  $FG$  in un punto  $A$ ; la polare di  $A$  passerà per

(<sup>1</sup>) DELAHIRE, l. c., II, 38.

(<sup>2</sup>) STAUDT, *Geometrie der Lage*, N° 237.

*E* polo di *FG* e per *P* polo di *p*, cioè sarà la *EP*; similmente *FP*, *GP* saranno le polari de' punti *B*, *C* in cui *p* sega *GE*, *EF*. Sia *A'* il punto in cui *FG* è segata dalla *EP*; saranno *FG* ed *AA'* due coppie di punti reciproci, e se l'involuzione da essi determinata ha due punti doppi *LL*<sub>1</sub>, questi saranno situati nella curva domandata (N° 220). Uguale considerazione vale per gli altri due lati del triangolo *EFG*.

Se il punto *P* è interno al triangolo *EFG*, i punti *A*, *B*, *C* riescono interni ai lati (finiti) *FG*, *GE*, *EF*. La retta *p* può segare due di questi lati o essere tutta esterna al triangolo. Nel 1° caso, nei due lati accennati le involuzioni de' punti reciproci sono entrambe dotate di punti doppi (N° 98, a): si avranno così quattro punti della curva cercata, e il problema sarà ridotto a descrivere per quattro punti dati una conica, rispetto alla quale due altri punti dati riescano reciproci (N° 248). Nel 2° caso, in ciascun lato del triangolo *EFG*, le due coppie di punti reciproci sono separate l'una mediante l'altra, epperò l'involuzione manca di punti doppi (N° 98); in questo caso adunque la conica non incontrerebbe alcuno dei lati del triangolo conjugato, cioè essa non esiste (N° 195).

Se il punto *P* è esterno al triangolo, uno solo de' tre punti *A*, *B*, *C* riesce interno al lato corrispondente. Se gli altri due lati sono segati internamente da *p*, le involuzioni mancano tutto di punti doppi, cioè la conica non esiste. Invece se *p* sega internamente il primo lato, ovvero se è tutta esterna al triangolo, la conica esiste, e si costruisce com'è detto superiormente.

In tutti questi casi, cioè, sia o non sia la conica reale, esiste il sistema polare (N° 238, d), individuato dal triangolo conjugato *EFG*, dal punto *P* e dalla retta *p*. Il problema della costruzione di cotesto sistema è lineare, mentre la costruzione della conica fondamentale è di 2° grado.

**258. PROBLEMA.** — Dato un pentagono *ABCDE*, costruire la conica, rispetto alla quale ciascun vertice è il polo del lato opposto (1°).

Sia *F* l'intersezione di *AB*, *CD*. Se si costruisce (N° 257) la conica *K* rispetto alla quale *ADF* sia un triangolo conjugato ed *E* il polo di *BC*, i punti *B*, *C* ne' quali *BC* è segata dalle *AF*, *DF* saranno i poli delle *ED*, *EA*, che congiungono il punto *E* coi punti *D*, *A*. Dunque ciascun vertice del pentagono sarà il polo del lato opposto; ossia la conica *K* sarà la domandata.

Se si costruiscono la conica *C* che passa pei cinque vertici e la conica *C'* che tocca i cinque lati del pentagono (N° 116, b), queste coniche saranno polari reciproche rispetto a *K* (N° 232).

**259. PROBLEMA.** — Dati in un piano cinque punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, dei quali tre qualunque non siano in una stessa retta, trovare un punto *M*, tale che il fascio *M* (*A* . *B* . *C* . *D* . *E*) sia proiettivo ad un fascio dato *abcde* (fig. 492°).

Per *D* tirinsi due rette *DD'*, *DE'* in modo che il fascio *D* (*A* . *B* . *C* . *D'* . *E'*) sia proiettivo ad *abcde* (N° 66, a destra). Costruiscasi il punto *E'* in cui

(1) STAUDT, I. c., N° 238, 258.

$DE'$  incontra la conica determinata dai quattro punti  $ABCD$  e dalla tangente  $DD'$  (N° 128); e quindi si trovi il punto  $M$  in cui la stessa conica incontra la  $EE'$ . Sarà  $M$  il punto cercato. Infatti, essendo  $MABCDE'$  punti di una stessa conica, si ha il gruppo  $M(A.B.C.D.E')$  proiettivo al gruppo  $D(A.B.C.D'.E')$ , che è, per costruzione, proiettivo al dato fascio  $abcde$ . Ma  $ME'$  passa per  $E$ , dunque il problema è risoluto.

Si risolva per esercizio anche il problema correlativo :

Trovare una retta  $m$  che incontri cinque rette date  $abcde$ , tre qualunque delle quali non concorrano insieme, in cinque punti formanti un gruppo proiettivo ad una punteggiata di cinque punti dati  $ABCDE$  (1).

**260. PROBLEMA.** — Dividere un dato arco circolare  $AB$  in tre parti uguali (2).

Nella circonferenza data (fig. 193\*) prendasi a partire da  $A$  un arco arbitrario  $AN$ , e a partire da  $B$ , ma in senso opposto, un arco doppio  $BN'$ . Condotta la tangente  $BT$ , gli angoli  $AON, TBN'$  sono uguali ed opposti di senso; ossia, se i punti  $N, N'$  variano simultaneamente, i raggi  $ON, BN'$  generano due fasci inversamente uguali. Il luogo del punto  $M$  ad essi comune sarà adunque un'iperbole equilatera (N° 250, b), i cui asintoti hanno le direzioni delle bisettrici  $SX, SY$  degli angoli delle  $AO, BT$ : giacchè queste rette sono raggi corrispondenti (sono quelle posizioni de' raggi mobili  $ON, BN'$ , per le quali gli archi  $AN, BN'$  sono nulli). Il centro dell'iperbole è il punto di mezzo della retta  $OB$ , congiungente i centri de' due fasci.

Costruita l'iperbole per mezzo del teorema di PASCAL, si ottiene un punto  $P$ , ov'essa attraversa l'arco dato  $AB$ ; ivi coincidono due punti corrispondenti  $N, N'$ , epperò  $P$  è il punto cercato di trisezione dell'arco dato: l'arco  $AP$  è la metà di  $PB$ .

L'iperbole incontra la circonferenza in due altri punti  $R, Q$ . Il punto  $R$  dà la trisezione dell'arco che con  $AB$  completa la semicirconferenza. Il punto  $Q$  dà la trisezione dell'arco che si ha togliendo  $AB$  dalla circonferenza intera.

**261.** Si è veduto (N° 149) che, se  $P'P''Q'Q''$  sono quattro punti dati in linea retta e, descritta per  $P'P''$  una conica ad arbitrio, le si conduca una tangente da  $Q'$  ed una tangente da  $Q''$ , la corda di contatto passa per uno de' punti doppi  $M', N'$  dell'involuzione determinata dalle coppie  $P'P'', Q'Q''$ . Le due tangenti da  $Q'$  combinate colle due tangenti da  $Q''$  danno quattro corde di contatto, due delle quali passeranno per  $M'$ , le altre due per  $N'$ .

Di qui si ricava un modo di costruire i punti doppi dell'involuzione  $P'P'', Q'Q''$ , ossia (N° 98, a) di trovare due punti  $M', N'$  che dividano armonicamente due segmenti dati  $P'P'', Q'Q''$ . Per  $P'P''$  descrivasi un cerchio e ad esso si tirino le tangenti  $t', u'$  da  $Q'$  e le tangenti  $t'', u''$  da  $Q''$ . La corda di contatto delle tangenti  $t't''$  e quella delle tangenti  $u'u''$  incontreranno la retta  $P'P''$  ne' punti cercati  $M', N'$  (fig. 194\*).

(1) STAUDT, l. c., N° 263.

(2) CHASLES, *Sections coniques*, N° 37. — STAUDT, *Beiträge*, N° 432.



a) Questa costruzione fu adoperata da BRIANCHON (1) nella soluzione de' due problemi, che noi abbiamo trattato al N° 171.

1° Costruire una conica della quale siano dati tre punti  $P, P', P''$  e due tangenti  $q, q'$ .

Le tangenti date incontrino  $PP'$  in  $Q, Q'$  e  $PP''$  in  $R, R'$ . Al cerchio descritto per  $PP'P''$  conducansi le tangenti da  $Q, Q'$ ; le corde di contatto segheranno  $PP'$  in due punti  $M, N$ ; e condotte del pari le tangenti da  $R, R'$ , le corde di contatto incontreranno  $PP''$  in due altri punti  $M', N'$ . Allora ciascuna delle congiugenti  $MM', MN', M'N', NN'$  incontrerà  $q, q'$  in due punti di contatto fra queste due rette ed una conica circoscritta al triangolo  $PP'P''$ .

Questa costruzione non differisce da quella esposta nel N° 171 (a sinistra) che pel modo di trovare i punti doppi  $MNM'N'$ .

2° Costruire una conica della quale siano dati due punti  $P', P''$  e tre tangenti  $q, q', q''$ .

Le tre tangenti date incontrino  $P'P''$  ne' tre punti  $Q, Q', Q''$  (fig. 194°). Ad un cerchio arbitrariamente descritto per  $P'P''$  si conducano le tangenti da  $Q, Q', Q''$ ; le corde di contatto delle tangenti da  $Q''$  combinate con quelle da  $Q$  incontrano  $P'P''$  in due punti  $M, N$ ; e le corde di contatto delle tangenti da  $Q''$  combinate con quelle da  $Q'$  determinano analogamente due punti  $M', N'$ .

Per la conica cercata, la corda di contatto delle tangenti  $qq''$  passerà adunque per  $M$  o per  $N$ ; e la corda di contatto delle tangenti  $q'q''$  passerà per  $M'$  o per  $N'$ . Le quattro combinazioni  $MM', MN', NM', NN'$  danno le quattro soluzioni del problema.

Il quale è così ridotto al seguente: descrivere una conica che tocchi tre rette date  $q, q', q''$ , in modo che le corde di contatto delle tangenti  $qq'', q'q''$  passino risp. per due punti dati  $M, M'$ . Indichiamo con  $QQ'Q''$  il triangolo formato dalle tre tangenti date, e con  $A, A', A''$  i punti di contatto, da determinarsi (fig. 195°). Per un corollario del teorema di DESARGUES (N° 152), il lato  $q \equiv QQ''$  è diviso armonicamente dal punto di contatto  $A$  e dalla corda  $A'A''$ . Si suppongano proiettati questi quattro punti armonici da  $A''$  su  $MQ''$ , e ne risulterà che il segmento  $HQ''$  della  $MQ''$ , intercelto fra le  $q', q''$ , è diviso armonicamente da  $M$  e dalla  $A'A''$ .

Dunque, tirata la  $MQ''$ , che seghi  $q''$  in  $R$ , trovisi il punto  $V$ , che con  $M$  divida armonicamente  $RQ''$ . (A quest'uopo tirisi ad arbitrio una retta per  $M$  a segare  $q'', q'$  in  $S, T$ , e si congiunga  $Q$  col punto  $U$  comune alle  $SQ'', TR$ ; la congiungente incontrerà  $RQ''$  in  $V$ ). Tirata la  $VM'$ , questa incontrerà  $q', q''$  in  $A', A''$ , e la  $MA''$  segnerà  $Q'Q'$  in  $A$ .

**262. TEOREMA.** — Se due angoli  $AOS, AO'S$  di grandezza invariabile ruotano intorno ai rispettivi vertici, in modo che il punto  $S$  comune a due lati

(1) BRIANCHON, *l. c.*, p. 47 e 51.

si conservi sopra una retta fissa  $u$ , l'intersezione  $A$  degli altri due lati descrive una conica (fig. 196<sup>a</sup>).

Si dimostra immediatamente considerando i fasci proiettivi generati dai raggi mobili  $OA$  ed  $OS$ ,  $OS$  ed  $O'S$ ,  $O'S$  ed  $O'A$  (N° 36, 82). Questo teorema fu dato da NEWTON (1) sotto il nome di descrizione organica delle coniche.

Lo studioso si proponga di dedurne una regola per descrivere una conica per cinque punti dati  $O, O', A, B, C$ ; ossia, dati questi cinque punti, determinare la grandezza de' due angoli  $AOS, A'OS$  e la retta  $u$ , affinché il luogo geometrico risultante sia una conica contenente i cinque punti dati.

Potrà inoltre esercitarsi nel dimostrare le seguenti proprietà:

Se sulla retta  $OO'$ , che unisce i vertici dei due angoli dati, si descrive un cerchio capace di un angolo uguale alla differenza fra quattro retti e la somma degli angoli dati, la conica sarà un'iperbole, un'ellisse, o una parabola, secondo che la retta data  $u$  segna il cerchio in due punti, o non lo incontra, o gli sia tangente. — Determinare gli assintoti dell'iperbole, i diametri della parabola.

Quand'è che la conica risulta un cerchio? Quando un'iperbole equilatera?

Trattare il caso in cui gli angoli dati siano supplementari. Allora la conica risulta un'iperbole; però, se  $u$  ed  $OO'$  sono parallele, si ha una parabola (2).

**263. TEOREMA.** — Se un triangolo varia in modo che i suoi lati girino intorno a tre punti dati  $O, O', S$ , mentre due vertici  $A, A'$  percorrono due rette fisse  $u, u'$ , il luogo del terzo vertice  $M$  è una conica, che passa per i punti  $O, O'$ , pel punto  $uu'$ , e per i punti  $B, C'$  ove  $u, u'$  segano rispettivamente  $O'S, OS$ .

**264. TEOREMA** (che comprende in sé il precedente come caso particolare). — Se un poligono varia in modo che i suoi lati girino intorno ad altrettanti punti fissi  $O_1, O_2, O_3, \dots$  (fig. 198<sup>a</sup>), mentre i suoi vertici, meno uno, si muovano su rette fisse  $u_1, u_2, u_3, \dots$ , l'ultimo vertice descriverà una conica; ed anche il punto comune ad ogni coppia di lati non consecutivi avrà per luogo geometrico una conica (3).

Si dimostri questo teorema ed il suo correlativo (4).

**265. TEOREMA.** — Se due angoli sono circoscritti ad una conica, i quattro punti di contatto de' loro lati, ed i loro vertici sono sei punti di un'altra conica.

Si dimostra, ponendo in evidenza la proiettività de' fasci che proiettano i quattro primi punti dai due vertici; al quale uopo si osserva che i primi quattro raggi costituiscono un gruppo proiettivo a quello de' loro poli relativi alla conica data.

(1) *L. c.*, lib. 1, lemma 21.

(2) MACLAURIN, *Geometria organica* (Londini 1720), section 4<sup>a</sup>.

(3) Teorema di MACLAURIN e di BRAIKENRIDGE (*Trans. fil. di Londra*, 1735).

(4) PONCELET, *l. c.*, N° 502.

**266. TEOREMA** (correlativo del precedente). Se due angoli sono circoscritti ad una conica, i quattro lati e le due corde di contatto sono sei tangenti di una stessa conica <sup>(1)</sup>.

Basta dimostrare che le due corde tagliano le altre quattro rette in due gruppi proiettivi di punti; il primo gruppo essendo proiettivo a quello formato dalle polari relative alla conica data.

**267. PROBLEMA.** — a) Dati tre segmenti  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  in una medesima retta, trovare un punto dal quale si veggano tutti e tre sotto angoli uguali (N° 83, d).

Quand'è che questi angoli possono essere retti? (Cfr. N° 98, b).

b) Date due punteggiature proiettive sovrapposte, trovare il punto che da un punto dato (nella retta data) è separato armonicamente mediante i due punti uniti (non dati) <sup>(2)</sup>.

c) Date due coppie di punti in linea retta, trovare in questa retta un quinto punto, tale che il prodotto delle sue distanze dai due punti della prima coppia sia al prodotto delle distanze dai punti della seconda coppia in un rapporto dato <sup>(3)</sup>.

d) Per un punto dato condurre una trasversale che determini su due rette date, a partire da punti dati, due segmenti il cui rapporto o il cui prodotto sia dato <sup>(4)</sup>.

**268. TEOREMA.** — Se in ciascuna diagonale d'un quadrilatero completo si prendono due punti che la dividano armonicamente, e se tre de' sei punti così presi (uno su ciascuna diagonale) sono in linea retta, anche gli altri tre saranno in linea retta.

Corollario: i tre punti di mezzo delle diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta.

**269. TEOREMA.** — Se un triangolo  $ABC$  è inscritto in un cerchio, e se da un punto  $O$  della circonferenza si abbassano sui lati altrettante oblique  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$ , sotto un angolo comune (di grandezza e senso), i piedi  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  di queste oblique sono in linea retta (fig. 199<sup>a</sup>).

Condotte per  $O$  le  $OA''$ ,  $OB''$ ,  $OC''$  parallele risp. a  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , si dimostra facilmente che gli angoli  $AOA''$ ,  $BOB''$ ,  $COC''$  hanno comuni le bisettrici; quindi la stessa proprietà compete agli angoli  $AOA'$ ,  $BOB'$ ,  $COC'$ . Donde segue (N° 106, b) che i lati di questi tre angoli sono accoppiati in involuzione; epperò (N° 103) i punti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sono in linea retta <sup>(5)</sup>.

**270. TEOREMA.** — Dato un triangolo circoscritto ad un cerchio, se dai suoi vertici si abbassano sopra una tangente tre oblique, le quali siano vedute

<sup>(1)</sup> CRASLES, *Sections coniques*, N° 213, 214.      <sup>(2)</sup> CRASLES, *Géom. sup.*, N° 269.

<sup>(3)</sup> Problema della sezione determinata di APOLLONIO. Cfr. CRASLES, *Géom. sup.*, N° 281.

<sup>(4)</sup> Problemi della sezione di ragione e della sezione di spazio di APOLLONIO. Cfr. CRASLES, *Géom. sup.*, N° 296 e 298.

<sup>(5)</sup> CRASLES, *I. c.*, N° 386.

dal centro sotto angoli uguali (in grandezza e senso), le tre oblique concorrono in uno stesso punto <sup>(1)</sup>.

Dimostrazione analoga a quella del teorema precedente.

**271.** Un utilissimo esercizio sarà quello di applicare la teoria dei poli e delle polari alla risoluzione de' problemi di 1° e 2° grado col mezzo della sola riga, supposto che sia dato un cerchio fisso ed il suo centro  $O$ . Diamo alcuni esempi:

a) Per un punto dato  $P$  condurre la parallela ad una retta data  $e$ .

Si trovi il polo  $E$  di  $e$  <sup>(2)</sup> e la polare  $p$  di  $P$ ; sia  $A$  il punto comune alle rette  $p$ ,  $OE$ ; la polare  $a$  di  $A$  sarà la retta cercata.

b) Per un punto dato  $P$  condurre la perpendicolare ad una retta data  $e$ .  
Conducasi per  $P$  la parallela alla  $OE$ ; sarà essa la retta cercata.

c) Dividere un segmento dato  $AB$  per metà.

Siano  $a$ ,  $b$  le polari di  $A$ ,  $B$ ; sia  $c$  il diametro che passa pel punto  $ab$ ; la retta  $d$  che rende armonico il gruppo  $abcd$  avrà per polo il punto di mezzo di  $AB$ .

d) Dividere per metà un arco  $MN$  del cerchio dato.

Si trovi il polo  $S$  della corda  $MN$ ; il diametro che passa per  $S$  darà il punto medio cercato dell'arco  $MN$ .

e) Dividere per metà un angolo dato.

Conducendo per un punto del cerchio le parallele ai lati dell'angolo dato, il problema attuale si riduce al precedente.

f) Prolungare un segmento  $AC$  di una parte uguale  $CB$ .

Siano  $a$ ,  $c$  le polari di  $A$ ,  $C$ ; sia  $d$  il diametro che passa pel punto  $ac$ , e  $e$  il raggio che rende armonico il gruppo  $abcd$ . Il raggio  $e$  avrà per polo il punto cercato  $C$ .

g) Costruire il cerchio che ha il centro in un punto dato  $U$ , e il raggio uguale ad una retta data  $UA$ .

Si prolunghi  $AU$  di una parte uguale  $UB$ ; si conducano in  $A$ ,  $B$  le perpendicolari ad  $AB$  e si dividano per metà gli angoli retti  $A$ ,  $B$ : le bisettrici concorrano in  $C$ ,  $D$ . Allora si risolverà il problema costruendo la conica che ha i diametri coniugati  $AB$ ,  $CD$  (N° 244, n).

<sup>(1)</sup> CHASLES, l. c., N° 387.

<sup>(2)</sup> Poli e polari rispetto al cerchio dato.

# INDICE

Prefazione . . . . .	Pag.	III
Programma di geometria per l'anno 3° degli Istituti tecnici »		XIX
§ 1. Definizioni. N° 1-7 . . . . .	»	1
§ 2. Proiezione centrale. N° 8-15 . . . . .	»	2
Punto all'infinito di una retta. N° 10		
Retta all'infinito di un piano. N° 11		
Teorema di DESARGUES sui triangoli prospettivi. N° 12, 13.		
Figure prospettive. N° 14, 15.		
§ 3. Omologia. N° 16-18 . . . . .	»	7
Figure omologiche. N° 16, 17.		
Costruzioni di figure omologiche. N° 18.		
§ 4. Figure omologiche a tre dimensioni. N° 19-20 . . . . .	»	11
Piano all'infinito. N° 20.		
§ 5. Forme geometriche. N° 21-26. . . . .	»	12
§ 6. Principio di dualità. N° 27-32 . . . . .	»	15
§ 7. Forme proiettive. N° 33-37 . . . . .	»	20
§ 8. Forme armoniche. N° 38-52 . . . . .	»	23
Teorema fondamentale. N° 38.		
Proiettività delle forme armoniche. N° 43.		
Costruzioni. N° 50.		
§ 9. Rapporti anarmonici. N° 53-59 . . . . .	»	30
Teorema di PAPPUS. N° 53, d).		
Proprietà dei gruppi armonici. N° 54, 55.		
I 24 rapporti anarmonici di 4 elementi. N° 57.		
Proprietà metrica esprimente la proiettività di due punteggiate. N° 59.		
§ 10. Costruzioni di forme proiettive. N° 60-72 . . . . .	»	40
Casi di proiettività. N° 62.		
Forme proiettive sovrapposte. N° 63.		

Non possono avere più di due elementi uniti. N° 64.  
 Costruzioni. N° 66-69, 71, 72.  
 Teorema di PAPPO sull'esagono inscritto fra due rette. N° 69.  
 Teoremi più generali. N° 70.

- § 11. Casi particolari ed esercizi. N° 73-91. . . . . Pag. 48  
 Punteggiate simili. N° 73.  
 Fasci uguali. N° 78.  
 Proprietà metriche. N° 83.  
 Esercizi. N° 84 e seg.  
 Porismi di EUCLIDE e di PAPPO. N° 88.  
 Problemi da risolversi coll'uso della sola riga. N° 89.  
 Teorema di CHARLES sulle figure prospettive. N° 90.
- § 12. Involutione. N° 92-106 . . . . . » 59  
 Definizione. N° 93, 94.  
 Proprietà metrica. N° 96.  
 I due casi dell'involutione. N° 98.  
 Altra proprietà metrica. N° 100.  
 Quadrangolo scagato da una trasversale. N° 101.  
 Costruzioni. N° 102.  
 Teoremi di CEVA e di MENELAUS. N° 104.
- § 13. Forme proiettive nel cerchio. N° 107-112 . . . . . » 70
- § 14. Forme proiettive nelle coniche. N° 113-123 . . . . . » 73  
 I teoremi fondamentali. N° 113.  
 Generazione delle coniche mediante due forme proiettive. N° 114.  
 Teoremi di PASCAL e di BRIANCHON. N° 117.  
 Teoremi di MÖBIUS e di MACLAURIN. N° 118, 119.  
 Proprietà della parabola. N° 120.  
 Proprietà dell'iperbole; teorema d'APOLLONIO. N° 122, 123.
- § 15. Costruzioni ed esercizi. N° 124-126 . . . . . » 82  
 Applicazione dei teoremi di PASCAL e di BRIANCHON alla costruzione delle coniche per punti o per tangenti. N° 124.  
 Casi che alcuni elementi siano all'infinito. N° 125, 126.
- § 16. Corollari dei teoremi di PASCAL e di BRIANCHON. N° 127-142 » 85  
 Teorema sul pentagono inscritto. N° 127.  
 Teorema di MACLAURIN sul quadrangolo inscritto. N° 129, 131.  
 Teorema sul quadrilatero circoscritto e sul quadrangolo formato dai punti di contatto. N° 132, 133.  
 Teorema sul quadrilatero circoscritto. N° 135.  
 Teoremi sul triangolo inscritto e sul triangolo circoscritto. N° 137, 139.  
 Teorema sul pentagono circoscritto. N° 141.  
 Applicazioni de' suddetti teoremi alla costruzione delle coniche. N° 128, 130, 134, 136, 138, 140, 141.  
 Coniche che si toccano fra loro. N° 142.
- § 17. Teorema di DESARGUES. N° 143-156 . . . . . » 93  
 Teorema di DESARGUES e suo correlativo. N° 143.

Coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo o inscritte in uno stesso quadrilatero. N° 445.

Teoremi di PONCELET. N° 446.

Corollari del teorema di DESARGUES. N° 447, 449, 454, 452.

Costruzioni. N° 444, 448, 450.

Gruppo armonico di quattro punti o di quattro tangenti. N° 452, 453.

Proprietà dell'iperbole. N° 454.

Teorema di PAPPO *ad quatuor lineas*, e suo correlativo. N° 453, 456.

## § 18. Elementi uniti ed elementi doppi. N° 157-165. . . . . Pag. 102

Serie proiettive di punti in una conica. N° 457.

Serie proiettive di tangenti di una conica. N° 458.

Involuzione di punti in una conica. N° 459-461.

Costruzione degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte e degli elementi doppi di un'involuzione. N° 462.

Coppia comune a due involuzioni sovrapposte. N° 464.

## § 19. Problemi di 2° grado. N° 166-185 . . . . . » 111

Intersezione di una conica con una retta; tangenti da un punto ad una conica. N° 466.

Coniche determinate da quattro punti e da una tangente, o da quattro tangenti e da un punto. N° 470.

Coniche determinate da tre punti e da due tangenti o da due punti e da tre tangenti. N° 471.

Costruzione di poligoni sotto condizioni date. N° 472-475, 485 *g*), *h*), *k*), *l*), *m*).

Costruzione de' punti comuni a due coniche. N° 476.

Problemi diversi. N° 477-482, 485.

Metodo geometrico di falsa posizione. N° 483.

Risoluzione de' problemi di 2° grado coll'uso della sola riga, supposto descritto un solo cerchio. N° 484.

## § 20. Poli e polari. N° 186-205 . . . . . » 128

Retta polare di un punto dato. N° 486.

Polo di una retta data. N° 487.

Punti reciproci. N° 489.

Costruzioni. N° 494, 493, 200, 204.

Triangoli coniugati. N° 492, 494.

Quadrangoli completi dotati di uno stesso triangolo diagonale. N° 496.

Coniche aventi uno stesso triangolo coniugato. N° 493, 202.

Altri teoremi sui triangoli inscritti o circoscritti. N° 204, 205.

## § 21. Centro e diametri. N° 206-229 . . . . . » 138

Diametro relativo ad un sistema di corde parallele. N° 206.

Caso della parabola. N° 208.

Centro. N° 210.

Diametri coniugati. N° 212.

Parallelogrammi inscritti o circoscritti. N° 214-216.

Caso del cerchio. N° 217.

Teorema di MÖBIUS. N° 219.

Involuzione di punti reciproci o di rette reciproche. N° 220.

Diametro ideale; corda ideale. N° 218, 223.

Involuzione dei diametri coniugati; assi. N° 225, 226.

Teorema di NEWTON sui centri delle coniche inscritte in un quadrilatero. N° 228.

Costruzioni. N° 213, 222, 227, 229.

§ 22. Figure polari reciproche. N° 230-238. . . . . Pag. 150

Curve polari reciproche. N° 230.

La polare reciproca di una conica è un'altra conica. N° 232.

Le figure polari reciproche sono figure correlative. N° 234.

Due triangoli coniugati ad una stessa conica. N° 236.

Due triangoli inscritti o circoscritti ad una stessa conica. N° 237.

Teorema di HESSE. N° 238.

Sistema polare. N° 238 d).

§ 23. Corollari e costruzioni. N° 239-271. . . . . » 158

Costruzioni diverse relative all'iperbole ed alla parabola. N° 239-243.

Proprietà de' diametri coniugati; teoremi di APOLLONIO. N° 244-245.

Teorema di CARNOT. N° 246.

Costruzioni di coniche. N° 247-249, 252-259, 264.

Iperbole equilatera. N° 250.

Costruzione per conoscere la specie di conica cui appartiene un arco dato. N° 251.

Trisezione di un dato arco circolare. N° 260.

Descrizione organica delle coniche (di NEWTON). N° 262.

Teorema di MACLAURIN e BRAIKENBIDGE. N° 264.

Altri teoremi e problemi diversi. N° 265-270.

Applicazione della teoria dei poli alla risoluzione dei problemi di 2° grado. N° 271.

# ERRATA.

Pag. 27, linea 46, invece di operazioni leggi proiezioni.

» 79, la nota (\*) dev'essere: MÖRUS, l. c., N° 278.

» 87, linea 46, invece di  $AB'AB'$  leggi  $AB'A'B$ .

» 400, » 37, invece di  $\frac{(A)}{(A')}$ , leggi  $\frac{(A')}{(A')}$ .

» 402, la nota (\*) dev'essere: BELLAVITIS, Saggio di geometria derivata (Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4°, 1838), p. 270, nota.

» 105, linea 30, invece di  $AB'AB'$  leggi  $AB'A'B$ .

» 114, » 27, » uniti » doppi.

» 455, » 4, » sei » cinque.



**ELEMENTI**  
DI  
**GEOMETRIA PROIETTIVA**

PER  
GLI ISTITUTI TECNICI

DEL  
REGNO D'ITALIA.

DI  
**LUIGI CREMONA**

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.

---

**Vol. I.**

---

**FIGURE**

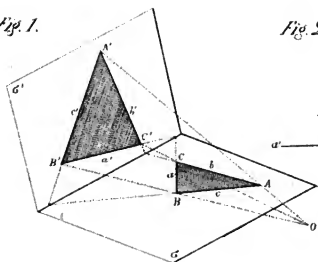


1872

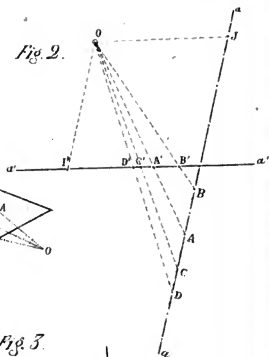
**G. B. PARAVIA E COMP.**  
ROMA - TORINO - MILANO - FIRENZE.



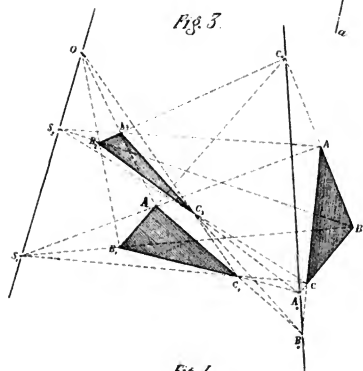
*Fig. 1.*



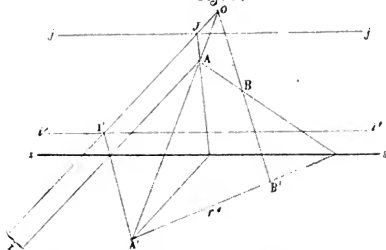
*Fig. 2.*

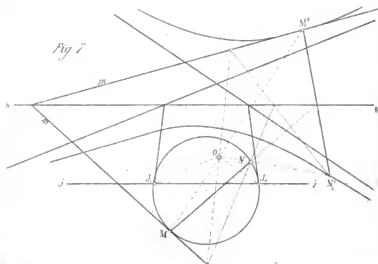
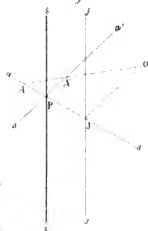
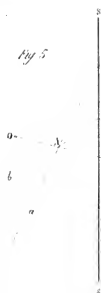


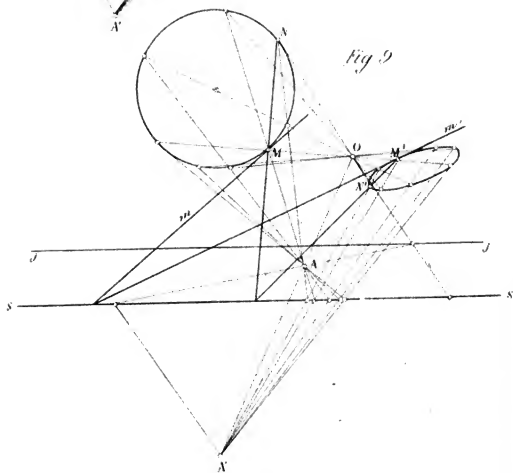
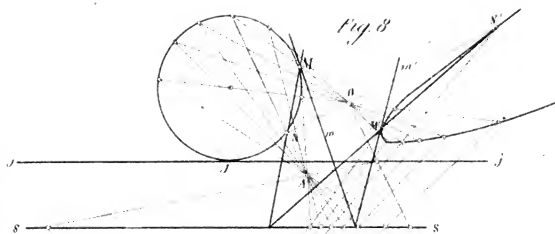
*Fig. 3.*

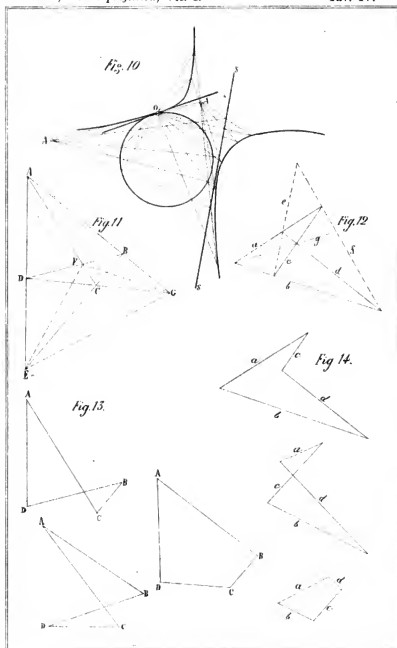


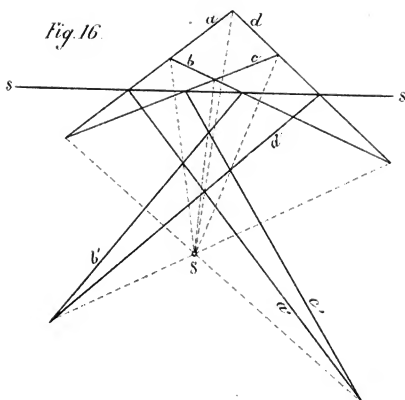
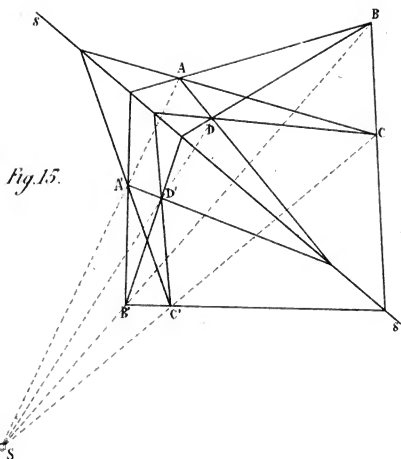
*Fig. 4.*

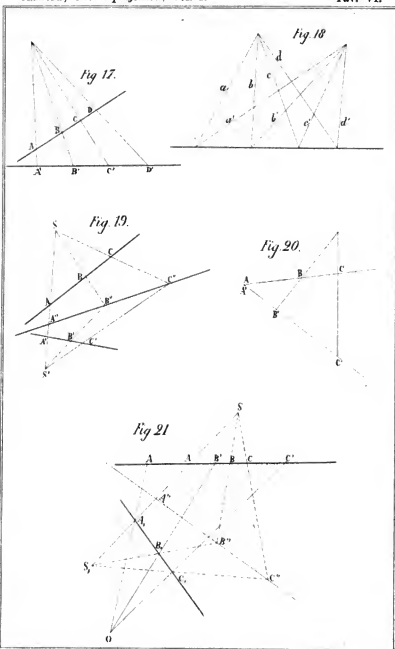






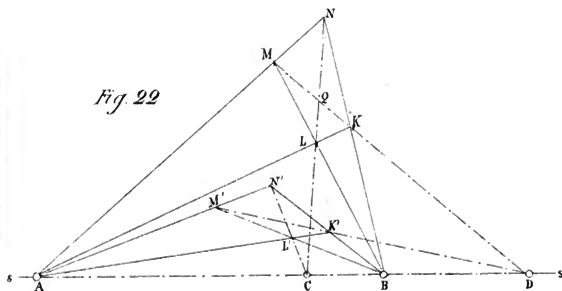




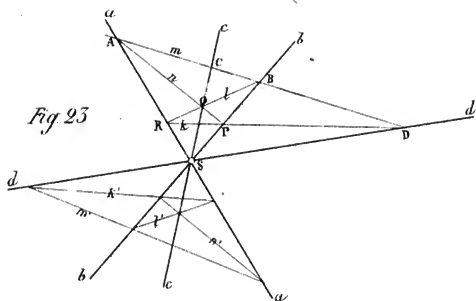




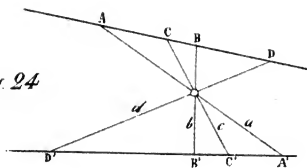
*Fig. 22*



*Fig. 23*



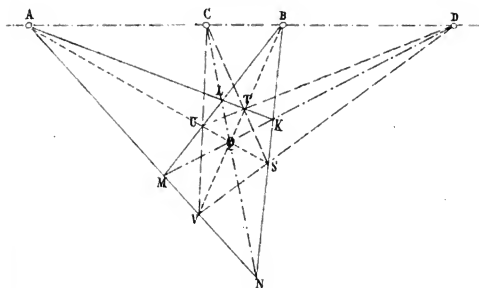
*Fig. 24*



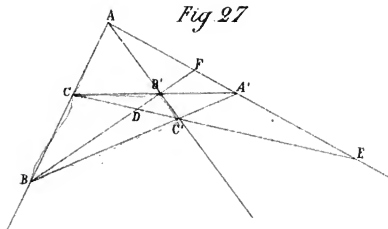
*Fig. 25*



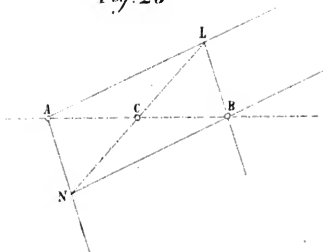
*Fig. 26*



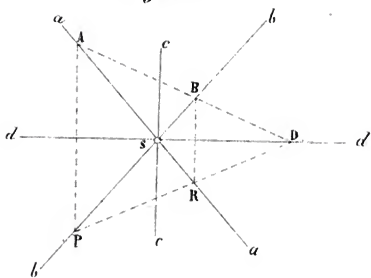
*Fig. 27*



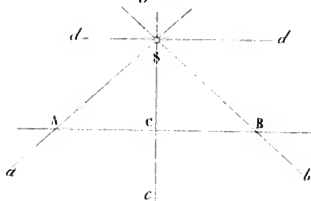
*Fig. 28*



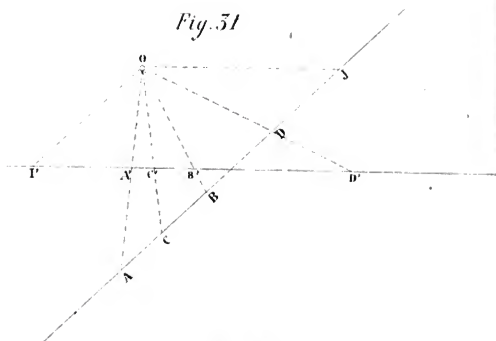
*Fig. 29*



*Fig. 30*



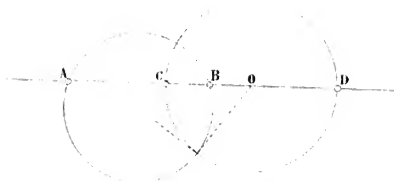
*Fig. 31*



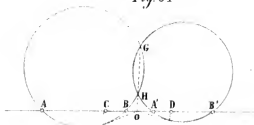
*Fig. 32*



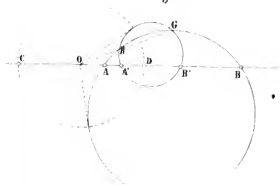
*Fig. 33*



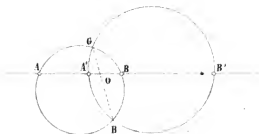
*Fig. 34*



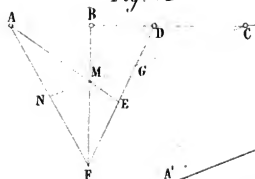
*Fig. 35*



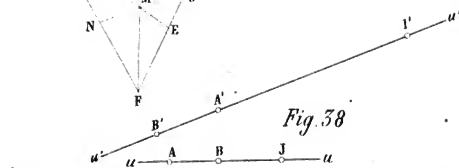
*Fig. 36*



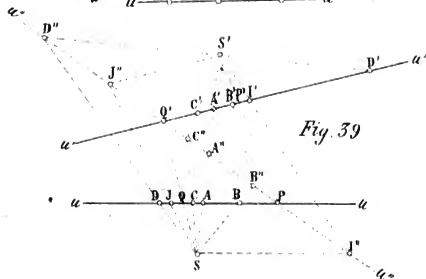
*Fig. 37*



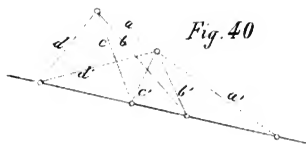
*Fig. 38*



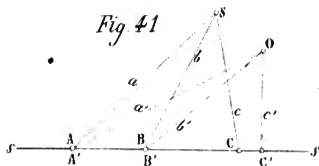
*Fig. 39*

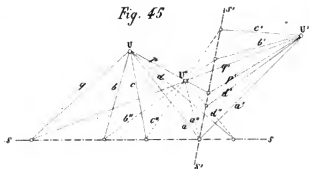
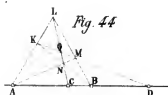
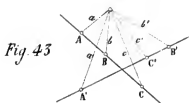
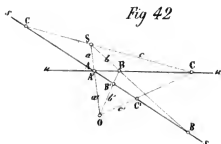


*Fig. 40*

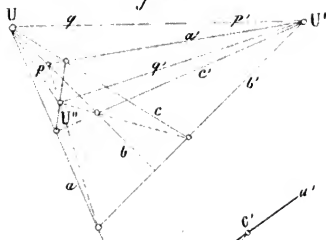


*Fig. 41*

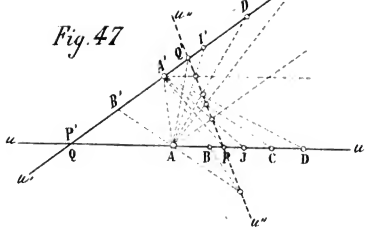




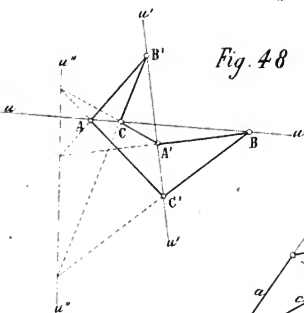
*Fig. 46*



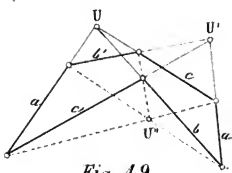
*Fig. 47*



*Fig. 48*



*Fig. 49*





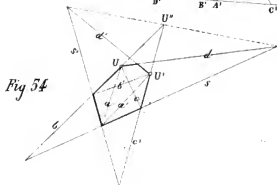
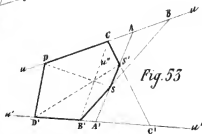
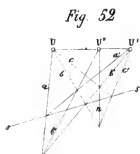
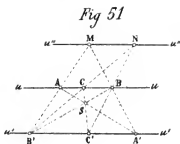
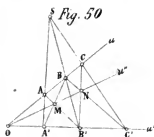


Fig. 55

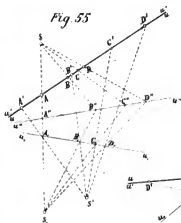


Fig. 56

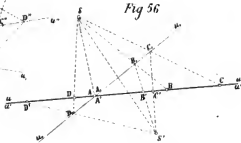


Fig. 56<sup>bis</sup>

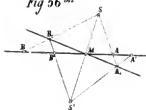


Fig. 56<sup>ter</sup>



Fig. 57

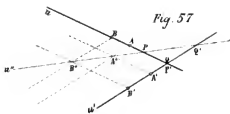
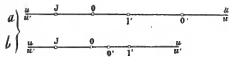
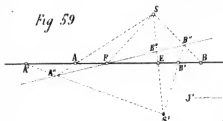


Fig. 58



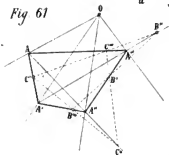
*Fig 59*



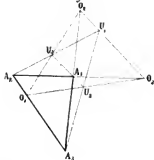
*Fig 60*



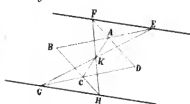
*Fig 61*



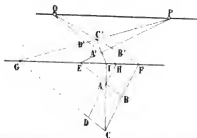
*Fig 62*



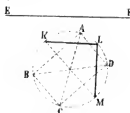
*Fig 63*



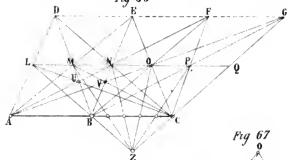
*Fig 64*



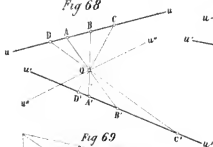
*Fig 65*



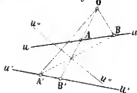
*Fig 66*



*Fig 68*



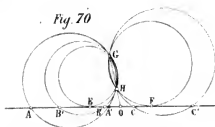
*Fig 67*



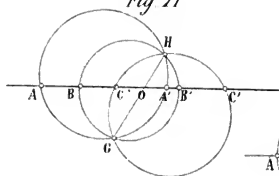
*Fig 69*



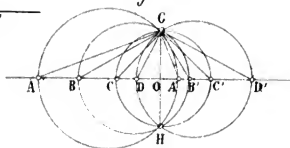
*Fig. 70*



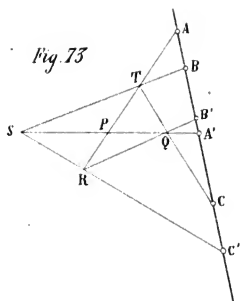
*Fig 71*



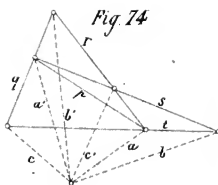
*Fig 72*



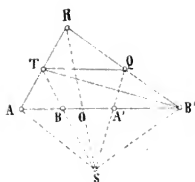
*Fig 73*



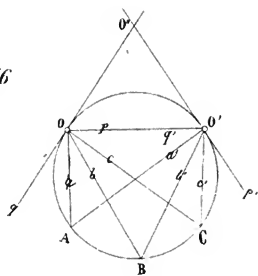
*Fig 74*



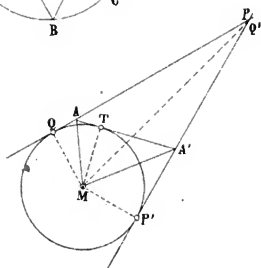
*Fig 75*



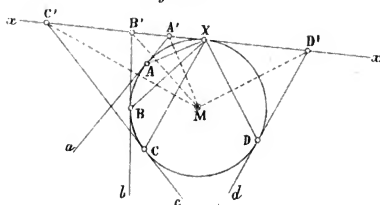
*Fig. 76*



*Fig. 77*



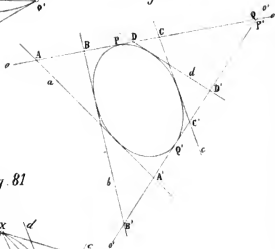
*Fig. 78*



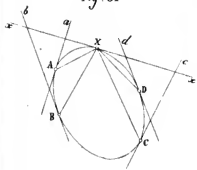
*Fig. 79*



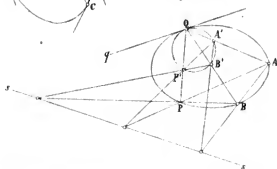
*Fig. 80*

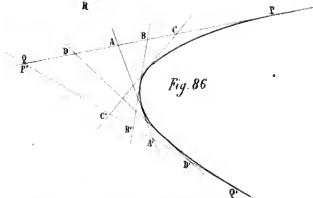
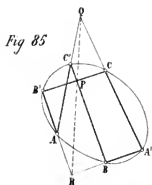
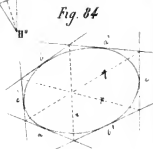
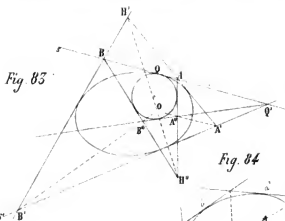


*Fig. 81*



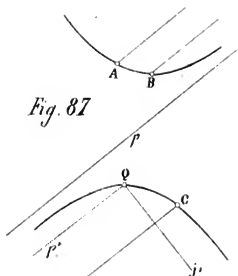
*Fig. 82*



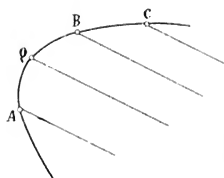




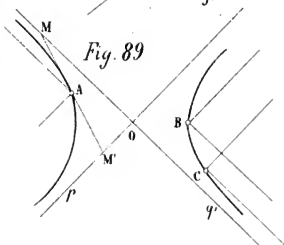
*Fig. 87*



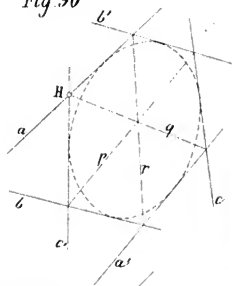
*Fig. 88*



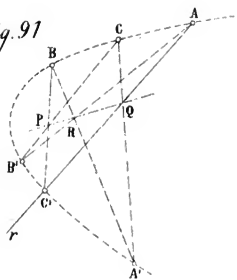
*Fig. 89*



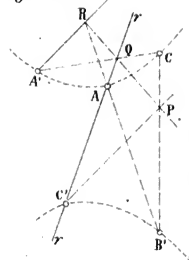
*Fig. 90*



*Fig. 91*



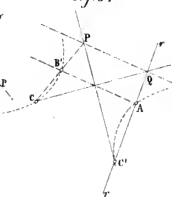
*Fig. 92*



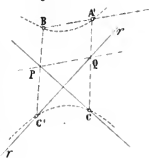
*Fig. 93*



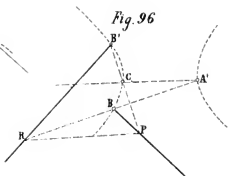
*Fig. 94*



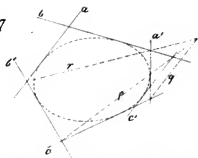
*Fig. 95*



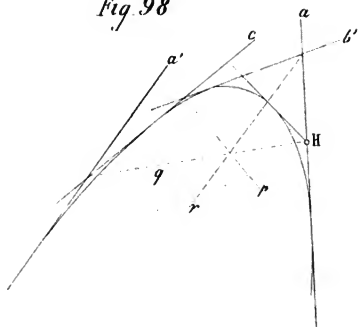
*Fig. 96*



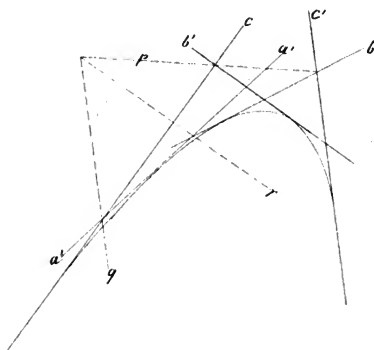
*Fig. 97*



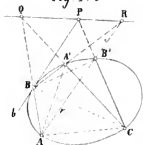
*Fig. 98*



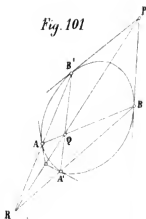
*Fig. 99*



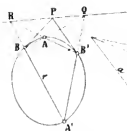
*Fig. 100*



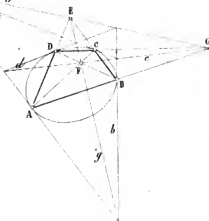
*Fig. 101*



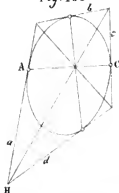
*Fig. 101 bis*



*Fig. 102*

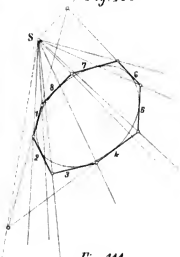


*Fig. 103*

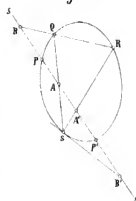




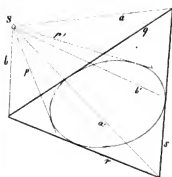
*Fig. 109*



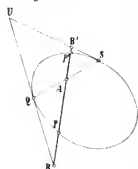
*Fig. 110*



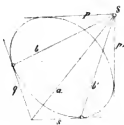
*Fig. 111*



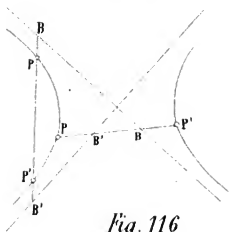
*Fig. 112*



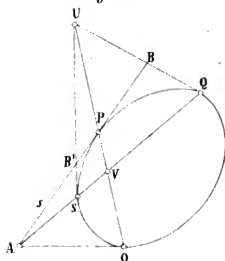
*Fig. 113*



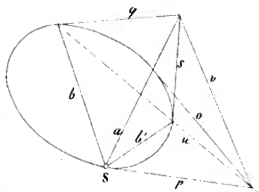
*Fig. 114*



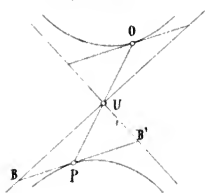
*Fig. 115*



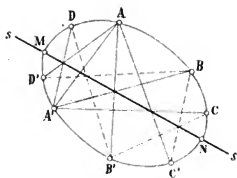
*Fig. 116*



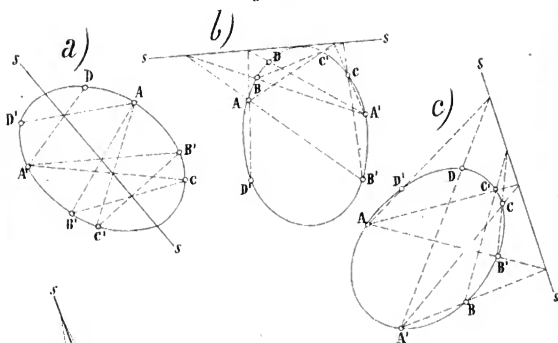
*Fig. 117*



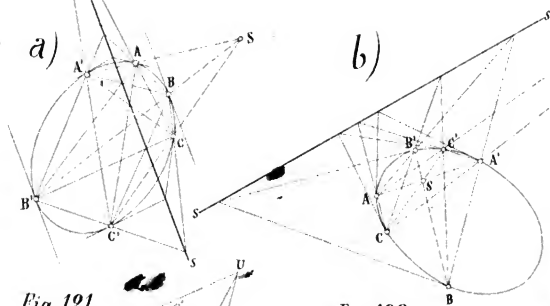
*Fig. 118*



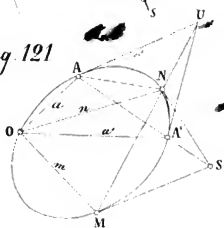
*Fig. 119*



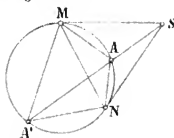
*Fig. 120*



*Fig. 121*

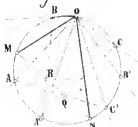


*Fig. 122*

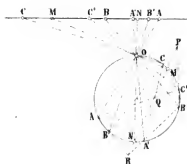




*Fig. 123*



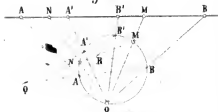
*Fig. 124*



*Fig. 125*



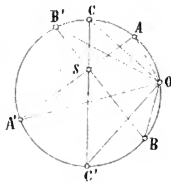
*Fig. 126*



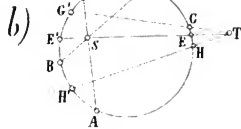
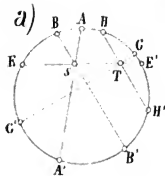
*Fig. 127*



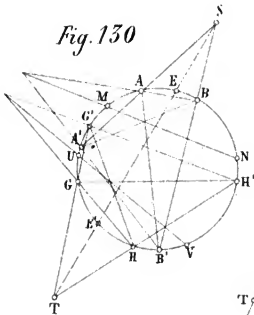
*Fig. 128*



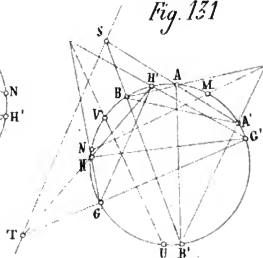
*Fig. 129*



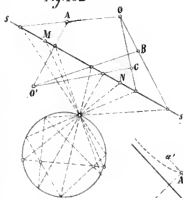
*Fig. 130*



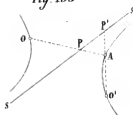
*Fig. 131*



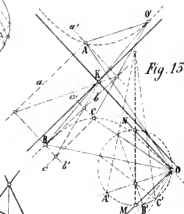
*Fig. 132*



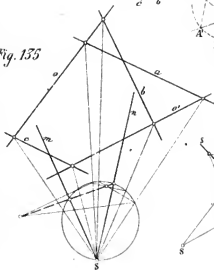
*Fig. 133*



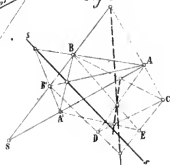
*Fig. 134*



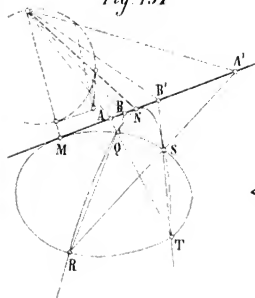
*Fig. 135*



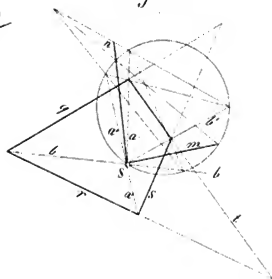
*Fig. 136*



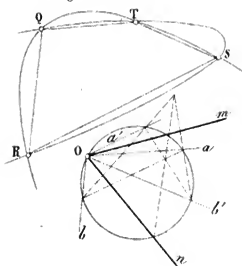
*Fig. 137*



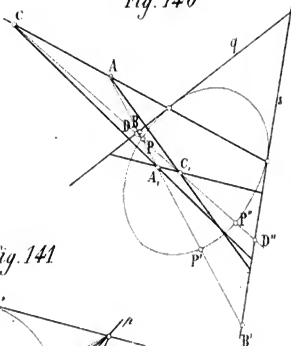
*Fig. 138*



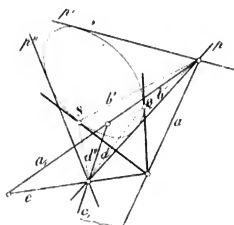
*Fig. 139*



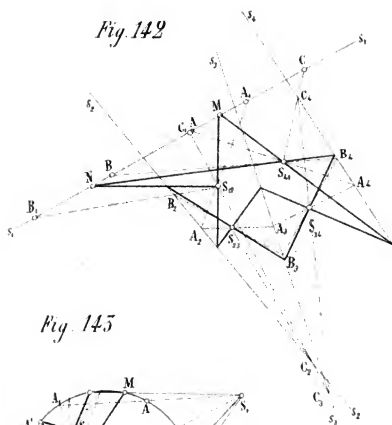
*Fig. 140*



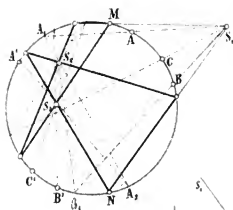
*Fig. 141*



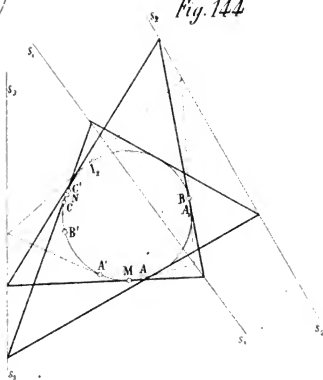
*Fig. 142*



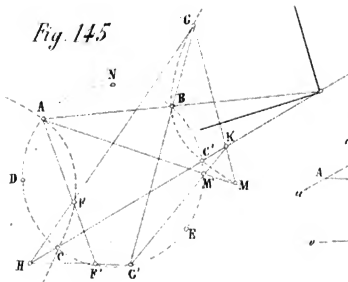
*Fig. 143*



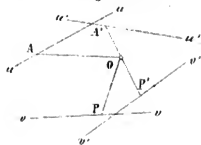
*Fig. 144*



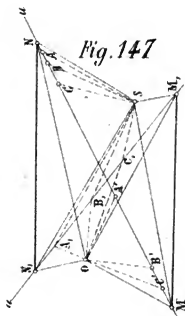
*Fig. 145*



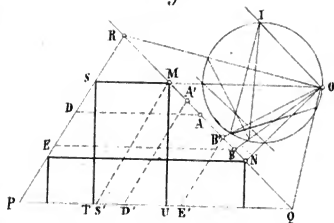
*Fig. 146*



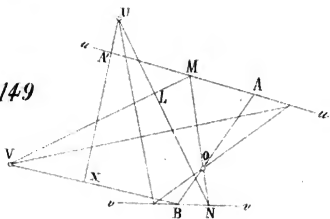
*Fig. 147*



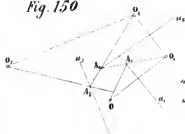
*Fig. 148*



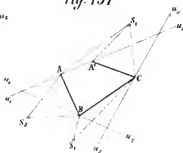
*Fig. 149*



*Fig. 150*



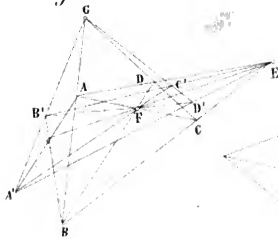
*Fig. 151*



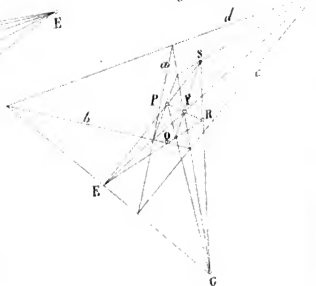
*Fig. 152*



*Fig. 156*



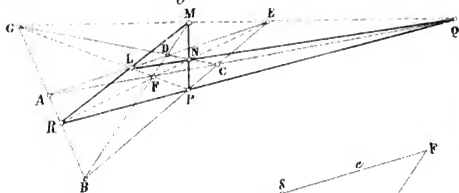
*Fig. 157*



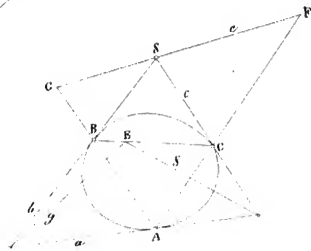
*Fig. 158*



*Fig. 159*



*Fig. 160*





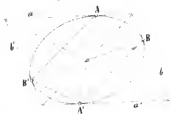
*Fig 161*



*Fig 162*



*Fig 163*



*Fig 164*



*Fig 165*



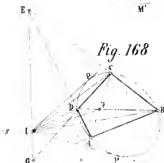
*Fig 166*

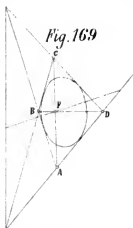


*Fig 167*

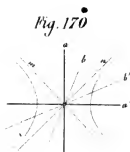


*Fig 168*



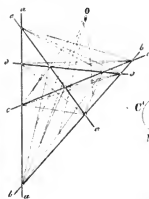


*Fig. 169*



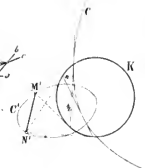
*Fig. 170*

*Fig. 171*



*Fig. 172*

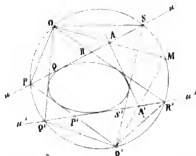
*Fig. 173*



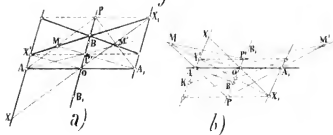
*Fig. 174*



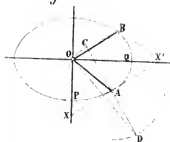
*Fig. 175*



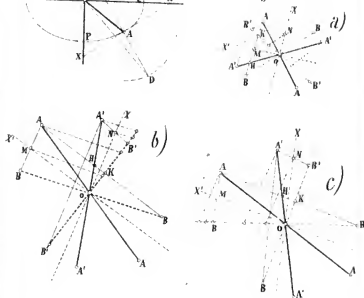
*Fig. 176*

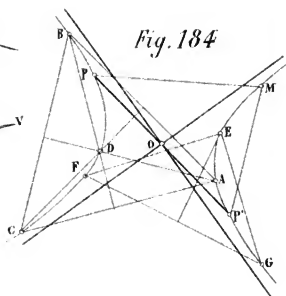
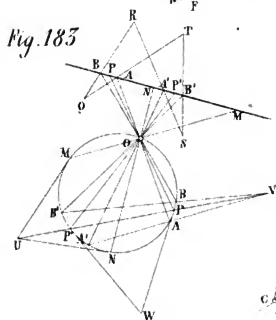
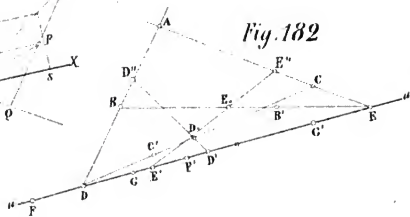
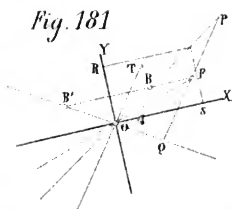
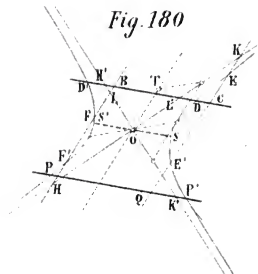
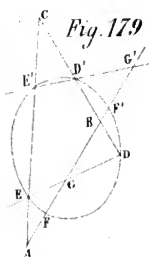


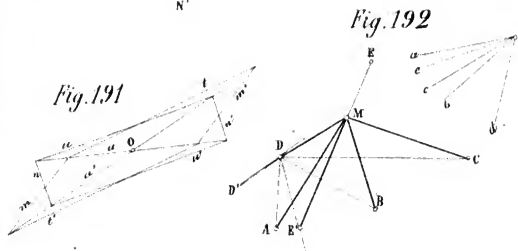
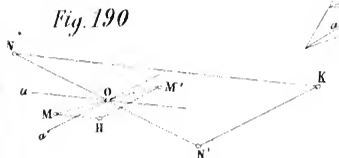
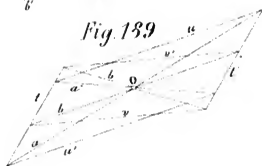
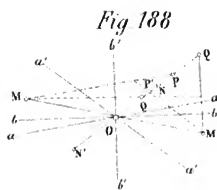
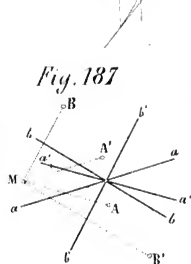
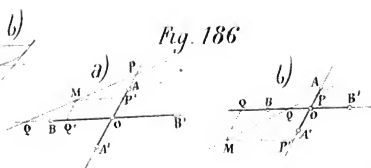
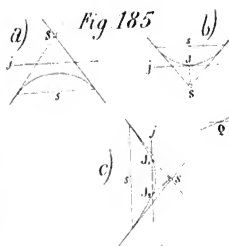
*Fig. 177*



*Fig. 178*









264.035





---

**Prezzo del Vol. I (Testo e Figure)**

**L. 3, 50**

---







